ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option scientifique

MATHEMATIQUES II

Année 1997

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On considère un parc de m machines identiques (avec $m \geqslant 1$) et, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant m$, on note X_i la variable aléatoire indiquant la durée de marche de la i-ième machine (avant que celle-ci ne tombe en panne) à partir d'un instant 0.
On désigne par a un nombre réel strictement positif donné, et l'on fait les hypothèses suivantes sur le fonctionnement des machines :

- (H1) Pour tout couple (t, h) de nombres réels tels que $t \geqslant 0$ et $h > 0$, on suppose que la variable aléatoire X_i à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ indiquant la durée de marche de la i-ième machine à partir de l'instant 0 vérifie la relation suivante :
$$P(X_i < t + h / X_i \geqslant t) = ah + h\varepsilon(h)$$
où $\varepsilon(h)$ est une fonction indépendante de l'entier i et de l'instant t, qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

- (H2) Les m machines fonctionnent indépendamment les unes des autres.

Pour tout nombre réel positif t, on désigne par :

- $N(t)$ la variable aléatoire indiquant le nombre de machines en panne à l'instant t.

- $p_k(t)$ la probabilité $P(N(t) = k)$ pour que le nombre $N(t)$ de machines en panne à l'instant t soit exactement égal à k, où k est un nombre entier tel que $0 \leqslant k \leqslant m$.

On suppose toutes les machines en marche à l'instant 0, autrement dit $p_0(0) = 1$.
L'objectif est de déterminer, sous ces hypothèses, la loi du nombre aléatoire $N(t)$ des machines déjà tombées en panne à un instant t. Le résultat de l'étude est obtenu par deux méthodes indépendantes dans les **parties 1** et **2**.

Partie 1

On étudie ici la loi de la variable aléatoire $N(t)$ en déterminant la loi des variables aléatoires X_i introduites dans le préambule.

1. **Loi de la durée de marche X_i d'une machine** $(1 \leqslant i \leqslant m)$
   On désigne par (t, h) un couple de nombres réels tels que $t \geqslant 0$ et $h > 0$, et l'on note $g_i(t) = P(X_i \geqslant t)$ la probabilité pour que X_i soit supérieure ou égale à t.

   (a) Comparer les événements $(X_i \geqslant t)$ et $(t \leqslant X_i < t + h) \cup (X_i \geqslant t + h)$.
   En déduire l'expression de la probabilité $P(t \leqslant X_i < t+h)$ en fonction de $g_i(t)$ et $g_i(t+h)$, puis établir à l'aide de l'hypothèse H1 l'égalité $g_i(t) - g_i(t + h) = [ah + h\varepsilon(h)]g_i(t)$.

   (b) En déduire successivement que :
   - $0 \leqslant g_i(t) - g_i(t + h) \leqslant [a + \varepsilon(h)]h$.
   - $0 \leqslant g_i(t - h) - g_i(t) \leqslant [a + \varepsilon(h)]h$ lorsque $0 < h \leqslant t$.

   En déduire que la fonction $t \mapsto g_i(t)$ est continue à droite sur $[0, +\infty[$, puis, en formant le quotient $[g_i(t + h) - g_i(t)]/h$ et en prenant sa limite lorsque h tend vers 0, montrer que la fonction $t \mapsto g_i(t)$ est dérivable à droite sur $[0, +\infty[$.
   Donner l'expression de sa dérivée à droite en t en fonction de a et $g_i(t)$.
   En déduire de même que la fonction $t \mapsto g_i(t)$ est continue à gauche sur $]0, +\infty[$, puis dérivable à gauche sur $]0, +\infty[$.

   (c) Etablir que g_i est dérivable sur R_+ et exprimer $g_i'(t)$ en fonction de a et $g_i(t)$.
   En étudiant la fonction $t \mapsto \exp(at).g_i(t)$ sur R_+ et en remarquant que $g_i(0) = 1$, expliciter la fonction g_i.

   (d) En déduire la fonction de répartition, la densité, la loi et l'espérance des variables X_i ainsi qu'une interprétation du nombre réel a.

2. **Etude de la loi de la variable aléatoire $N(t)$.**
   Déduire des résultats précédents les probabilités $p_k(t)$, la loi et l'espérance de $N(t)$.
   Quelle est la limite de $p_k(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$? Etait-ce prévisible?

Partie 2

On étudie ici la loi de la variable aléatoire $N(t)$ en déterminant sa fonction génératrice $G(x, t)$, c'est-à-dire la fonction de la variable réelle x définie par :

$$G(x, t) = \sum_{k=0}^{m} p_k(t)x^k$$

Cette étude, indépendante de celle de la partie 1, n'utilise aucun de ses résultats.

1. **Etude des probabilités conditionnelles $P(N(t + h) = k/N(t) = i)$.**
   Pour tout couple (t, h) de nombres réels tels que $t \geqslant 0$ et $h > 0$ et tout couple (k, i) de nombres entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant m,\ 0 \leqslant i \leqslant m$, on se propose d'étudier les probabilités conditionnelles $P(N(t + h) = k/N(t) = i)$.

   (a) Que vaut $P(N(t + h) = k/N(t) = i)$ si $k < i$?

   (b) Etablir à l'aide des hypothèses H1 et H2 que :

   $$P(N(t + h) = k/N(t) = k) = (1 - ah - h\varepsilon(h))^{m-k}$$

   En déduire par un développement limité à l'ordre 1 que :

   $$P(N(t + h) = k/N(t) = k) = 1 - (m - k)ah + h\varepsilon'(h)$$

   où $\varepsilon'(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

(c) Etablir de même que, pour $1 \leqslant k \leqslant m$:

$$P(N(t+h)=k/N(t)=k-1)=(m-k+1)ah+h\varepsilon''(h)$$

où $\varepsilon''(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

(d) Démontrer enfin que $P(N(t+h)=k/N(t)=i)$ est négligeable devant h si $k \geqslant i+2$, c'est-à-dire égale à $h\varepsilon'''(h)$ où $\varepsilon'''(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0 (on justifiera avec soin les résultats obtenus).

2. **Etude des probabilités de panne** $p_k(t)$ **(**$0 \leqslant k \leqslant m$**)**

(a) A l'aide de la formule des probabilités totales, déduire des résultats précédents, pour $t \geqslant 0$ et $h > 0$, la probabilité $p_k(t+h)$ en fonction des probabilités $p_j(t)$ ($O \leqslant j \leqslant m$).
Quelles expressions de $p_k(t+h)-p_k(t)$, puis de $p_k(t)-p_k(t-h)$ (où $h \leqslant t$) en résulte-t-il ?

(b) En déduire que la fonction $t \mapsto p_k(t)$ est continue à droite sur $[0,+\infty[$, puis, en formant le quotient $[p_k(t+h)-p_k(t)]/h$ et en prenant sa limite lorsque h tend vers 0, montrer que la fonction $t \mapsto p_k(t)$ est dérivable à droite sur $[0,+\infty[$.
Donner l'expression de sa dérivée à droite en t en fonction de $k, m, a, p_{k-1}(t), p_k(t)$. - (On pourra convenir, ce qui est naturel, que $p_{-1}(t)=0$).
En déduire de même que la fonction $t \mapsto p_k(t)$ est continue à gauche sur $]0,+\infty[$, puis dérivable à gauche sur $]0,+\infty[$.

(c) Etablir, pour $0 \leqslant k \leqslant m$, que p_k est dérivable sur R_+ et exprimer $p'_k(t)$ en fonction de $k, m, a, p_{k-1}(t), p_k(t)$, puis en déduire la relation (R) suivante:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,t)=ma(x-1)G(x,t)-ax(x-1)\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)$$

3. **Etude d'un endomorphisme auxiliaire.**
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_m[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à m, et l'application f associant à tout polynôme U de $\mathbb{R}_m[X]$ le polynôme $V=f(U)$ défini par:

$$V(x)=ma(x-1)U(x)-ax(x-1)U'(x)$$

où U' désigne le polynôme dérivé de U.

(a) Etablir que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_m[X]$.

(b) Soit λ une valeur propre de f et soit P un polynôme propre unitaire associé à λ, c'est-à-dire un polynôme unitaire P tel que $f(P)=\lambda P$.

- Etablir que 0 ou 1 est racine de P.

On pose donc $P(X)=X^h(X-1)^kR(X)$, où R est un polynôme tel que $R(0)\neq 0$, $R(1)\neq 0$ et h,k deux nombres entiers naturels tels que $1 \leqslant h+k \leqslant m$.

- Ecrire l'égalité $f(P)=\lambda P$ (que l'on simplifiera par $x^h(x-1)^k$), et en faisant tendre x vers 0 et vers 1, déterminer h et λ en fonction de a, k, m, et P en fonction de k et m

(c) Pour tout entier naturel $k \leqslant m$, on note W_k le polynôme de $\mathbb{R}_m[X]$ défini par :

$$W_k(X)=X^{m-k}(X-1)^k$$

Déterminer sous forme factorisée l'image par f du polynôme W_k.
Quelles sont les valeurs propres de l'endomorphisme f? f est-il diagonalisable ?

(d) Montrer que $(W_0, W_1, \ldots, W_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$, et déterminer les composantes du polynôme $U=1$ dans cette base en développant l'égalité $[X-(X-1)]^m=1$.

4. **Etude de la loi de la variable aléatoire** $N(t)$**.**
On décompose la fonction polynôme $x \mapsto G(x,t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_m[X]$ d'une part, dans la base $(W_0, W_1, \ldots, W_m)$ de $\mathbb{R}_m[X]$ d'autre part :

$$G(x,t)=\sum_{k=0}^{m}p_k(t)x^k=\sum_{k=0}^{m}q_k(t)W_k(x)$$

(a) On désigne par Π la matrice de passage de la base $(W_0, W_1, \ldots, W_m)$ à la base canonique $(1, X, \ldots, X^m)$. Ecrire une relation entre les deux matrices-colonnes de composantes $q_0(t), q_1(t), \ldots, q_m(t)$ d'une part, $p_0(t), p_1(t), \ldots, p_m(t)$ d'autre part. En déduire que $q_0, q_1, \ldots, q_m$ sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

(b) En utilisant l'expression de $x \mapsto G(x,t)$ dans la base $(W_0, W_1, \ldots, W_m)$, établir que la relation (R) obtenue à la question 2 équivaut aux $m + l$ égalités suivantes :

$$q_k'(t) = -akq_k(t) \quad (0 \leqslant k \leqslant m)$$

En déduire que la fonction $t \mapsto \exp(akt).q_k(t)$ est constante sur $\mathbb{R}_+$, et que l'on a pour tout réel positif t: $q_k(t) = C_k.\exp(-akt)$ où C_k est une constante réelle.

(c) Vérifier que $G(x, 0) = 1$, et en déduire que :

$$\sum_{k=0}^{m} C_k W_k(X) = 1$$

En comparant cette expression du polynôme $U = 1$ dans la base $(W_0, W_1, \ldots, W_m)$ de $\mathbb{R}_m[X]$ à celle obtenue à la question 3, déterminer les constantes C_k $(0 \leqslant k \leqslant m)$.
En déduire alors que :

$$G(x,t) = [(1 - \exp(-at))x + \exp(-at)]^m$$

(d) En développant cette expression de $G(x,t)$, en déduire à nouveau les probabilités $p_k(t)$, la loi et l'espérance de la variable aléatoire $N(t)$.