ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option technologique

Année 1997

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Une calculatrice de poche pouvant être programmable et / ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans documentd'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large est autorisée.

Exercice 1

On considère dans le plan les 3 points $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(2,1)$ et, à toute droite D d'équation $y = ax + b$, on associe les 3 points A', B', C' de cette droite D dont les abscisses sont respectivement $0, 1, 2$.
L'objectif de l'exercice est de déterminer la droite des moindres carrés de ce nuage de 3 points, c'est-à-dire la droite d d'équation $y = ax + b$ minimisant l'expression :

$$f(a,b) = (AA')^2 + (BB')^2 + (CC')^2.$$

1. Etude d'un cas particulier.
   Représenter sur une même figure (unité 6 centimètres) la droite D et les 6 points A, B, C, A', B', C' lorsque $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{6}$.
   Que vaut alors $f(a,b)$?

2. Etude du cas général

   (a) Déterminer en fonction des nombres réels a et b les ordonnées des 3 points A', B', C' et les longueurs $A'A, B'B, C'C$.
   En déduire que :

$$f(a,b) = 3b^2 - 2(1-3a)b + 5a^2 - 4a + 1 = 3\left(b - (\frac{1}{3} - a)\right)^2 + 2a^2 - 2a + \frac{2}{3}.$$

(b) En déduire que, lorsque le nombre réel a est fixé, l'expression $f(a,b)$ est minimale si et seulement si $b = \frac{1}{3} - a$.

(c) Calculer $g(a) = f(a, \frac{1}{3} - a)$, puis étudier cette fonction g de la variable réelle a (on calculera sa dérivée et on dressera son tableau de variation).
En déduire pour quelle valeur de a cette fonction g est minimale, et préciser la valeur associée de $b = \frac{1}{3} - a$.

(d) En déduire le couple (a,b) minimisant l'expression $f(a,b)$, puis l'équation $y = ax + b$ de la droite des moindres carrés du nuage des 3 points A, B, C.

Exercice 2

On se propose de déterminer des valeurs approchées du nombre $\sqrt{3}$à l'aide de la suite définie par son premier terme $u_0 = 2$ et, pour $n \geqslant 0$, par la relation :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right).$$

1. Etude d'une fonction auxiliaire.
   On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right).$$

   (a) Calculer la dérivée de f et étudier les variations de f sur $]0, +\infty]$.
   En déduire le minimum de la fonction f sur $]0; +\infty]$.

   (b) Déterminer les limites de f quand x tend vers 0 et $+\infty$, puis étudier l'existence d'une éventuelle asymptote de la courbe C représentative de f quand x tend vers $+\infty$.

   (c) Tracer la courbe représentative de f sur $]0; +\infty]$. (unité graphique 2 cm).
   On donne $\sqrt{3} \approx 1,7$.

2. Etude de la convergence de la suite (u_n)

   (a) Etablir que pour tout nombre entier naturel n, $u_n > 0$, puis déduire de la question précédente que $u_n \geqslant \sqrt{3}$.

   (b) En déduire le signe de $(u_{n+1} - u_n)$ et la décroissance de la suite (u_n).

   (c) Etablir à l'aide de l'expression de $f'(x)$ que $0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{8}$ pour $\sqrt{3} \leqslant x \leqslant 2$.
   En appliquant l'inégalité des accroissements finis (dont on rappellera l'énoncé) à la fonction f sur le segment $\left[\sqrt{3}; u_n\right]$, montrer que :

$$0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{3} \leqslant \frac{1}{8}(u_n - \sqrt{3}),$$

   et que :

$$0 \leqslant u_n - \sqrt{3} \leqslant \frac{2 - \sqrt{3}}{8^n}.$$

   (d) En déduire la convergence de la suite (u_n) vers $\sqrt{3}$.

3. Etude d'une majoration plus fine de $u_n - \sqrt{3}$

   (a) Calculer (avec la calculatrice) u_n pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Que constate-t-on ?

(b) Prouver par récurrence l'inégalité suivante :

$$0 \leqslant u_n - \sqrt{3} \leqslant 2\sqrt{3}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)^{2^n}.$$

(c) Par élévation au carré, vérifier l'inégalité $1,7 < \sqrt{3} < 2$, et en déduire que :

$$0 \leqslant u_n - \sqrt{3} \leqslant 4.10^{-2^n}.$$

Quelle majoration de $u_n - \sqrt{3}$ en déduit-on pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$?

Exercice 3

On étudie une suite de jets d'une pièce , puis de deux et trois pièces équilibrées.

1. Calcul de sommes de séries.
On considère dans cette question un nombre entier $n \geqslant 1$ et la fonction définie pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1[$ par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

(a) Calculer $(1-x)S_n(x)$ et en déduire une expression de $S_n(x)$.
En déduire, pour $0 \leqslant x < 1$, la somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k$.

(b) Dériver $S_n(x)$ et déterminer la limite de la suite nx^nquand n tend vers $+\infty$.
En déduire, pour $0 \leqslant x < 1$, la somme $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$.

2. Etude du jet d'une pièce équilibrée.
On lance indéfiniment une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant Pile ou Face avec la probabilité $\frac{1}{2}$) et l'on désigne par T la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, la pièce donne Face.

(a) Déterminer pour tout entier $k \geqslant 1$ la probabilité des événements $T = k$, $T \leqslant k$.

(b) En déduire l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T.

3. Etude du jet de deux pièces équilibrées.
On considère le jeu suivant : on lance indéfiniment un ensemble de deux pièces équilibrées. Autrement dit, on lance une première fois les 2 pièces, puis on relance une seconde fois les 2 pièces, et ainsi de suite. On désigne :

- Par N la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, chacune des 2 pièces a amené au moins une fois Face.
- Par T_1 la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, la première pièce a amené Face, par T_2 la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, la seconde pièce a amené Face.

(a) Déterminer la probabilité $P(N = 1)$

(b) Comparer les événements $(N \leqslant k)$ et $[(T_1 \leqslant k) \cap (T_2 \leqslant k)]$ pour $k \geqslant 1$.
En déduire les probabilités $P(N \leqslant 2)$, puis, plus généralement $P(N \leqslant k)$ pour $k \geqslant 1$.

(c) Déduire de ce résultat que :

$$P(N = k) = (\frac{1}{2})^{k-1} - \frac{3}{4}(\frac{1}{4})^{k-1}.$$

(d) On s'intéresse enfin à l'espérance et à la médiane de la variable aléatoire N.

- Exprimer, sous forme de fraction irréductible, l'espérance $E(N)$ de N.
- Etablir que l'inégalité $P(N \leqslant k) \geqslant 0,5$ équivaut à l'inégalité $k \geqslant 2$.

4. Etude du jet de trois pièces équilibrées.
On considère le jeu suivant : on lance indéfiniment un ensemble de 3 pièces équilibrées. On désigne par N la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, chacune des 3 pièces a amené au moins une fois Face.
En raisonnant comme à la question précédente, calculer la probabilité $P(N = k)$ où $k \geqslant 1$, et déterminer , sous forme de fraction irréductible, l'espérance $E(N)$ de N, puis l'entier m tel que l'inégalité $P(N \leqslant k) \geqslant 0,5$ soit équivalente à l'inégalité $k \geqslant m$.