ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option scientifique

MATHEMATIQUES II

Année 1998

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On considère dans ce problème un guichet auquel se présentent aléatoirement des clients. L'objectif est d'étudier la file d'attente se formant à ce guichet au cours du temps, ce qui est traité dans la **partie 2**. Dans la **partie 1**, on étudie une suite récurrente utilisée ultérieurement.

Partie 1

On considère un nombre réel strictement positif a et la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = e^{a(x-1)}$$

On définit alors une suite (u_k) par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation :

$$u_{k+1} = f(u_k)$$

1. Convergence de la suite (u_k).

   (a) Etablir par récurrence pour tout nombre entier naturel k les inégalités :

   $$0 \leqslant u_k \leqslant 1 \text{ et } u_k \leqslant u_{k+1}$$

   (b) En déduire la convergence de la suite (u_k), dont on notera la limite $L(a)$.

2. Limite de la suite (u_k) lorsque $a < 1$.

(a) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir que :

$$0 \leqslant 1 - u_{k+1} \leqslant a(1 - u_k)$$

(b) En déduire l'inégalité $0 \leqslant 1 - u_k \leqslant a^k$ pour tout nombre entier naturel k, puis la limite $L(a)$ de la suite (u_k) pour $0 < a < 1$.

3. Limite de la suite (u_k) lorsque $a \geqslant 1$.

(a) On étudie ici les racines de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \geqslant 1$.

- Prouver que $0 \leqslant 1 - \dfrac{\ln a}{a} \leqslant 1$ pour $a \geqslant 1$.
- Exprimer l'unique racine de l'équation $f'(x) = 1$ en fonction de a.
- En déduire la variation de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ pour $a = 1$, puis pour $a > 1$.
  Préciser dans ces deux cas le nombre des racines de l'équation $f(x) = x$.

On convient désormais de noter $r(a)$ la plus petite racine de l'équation $f(x) = x$.
On vérifiera en particulier que $0 < r(a) < 1$ pour $a > 1$, et que $r(1) = 1$.

(b) On étudie ici la plus petite racine $r(a)$ de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \geqslant 1$.

- Etudier et représenter graphiquement sur $[0, +\infty[$ la fonction $x \mapsto xe^{-x}$.
  Comparer les images des nombres a et $ar(a)$ par cette fonction.
- En déduire que la fonction Φ, définie pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ par $\Phi(x) = xe^{-x}$, réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1/e]$ et montrer que la fonction Φ^{-1} est continue et strictement croissante sur $[0, 1/e]$ (on citera le théorème utilisé).
  Dresser le tableau de variation de Φ^{-1}.
- Prouver que $r(a) = \dfrac{1}{a}\Phi^{-1}(ae^{-a})$, puis déterminer la limite de $r(a)$ en $+\infty$.

(c) On étudie maintenant la limite de la suite (u_k) lorsque $a \geqslant 1$.

- Etablir l'inégalité $0 \leqslant u_k \leqslant r(a)$ pour tout nombre entier naturel k.
- En déduire la limite $L(a)$ de la suite (u_k) pour $a \geqslant 1$.
- Ecrire (en PASCAL) un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée de $L(a)$ à 10^{-2} près. On obtient ainsi $L(2) = 0,20$, $L(4) = 0,02$, etc.

4. Courbe représentative de la fonction $a \mapsto L(a)$ pour $a > 0$.
Déduire de ces résultats l'allure de la courbe représentative de la fonction $a \mapsto L(a)$ pour $a > 0$.

Partie 2

Dans cette partie, le temps est supposé discrétisé et se présente donc comme une succession d'instants 0, 1, 2, 3, ... , n, ... et l'on considère un guichet auquel peut se présenter au plus un client dans un intervalle de temps $[n-1, n[$, c'est à dire entre deux instants consécutifs quelconques $n-1$ et n ($n \geqslant 1$).
On suppose qu'un premier client est au guichet à l'instant 0, et, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, on désigne par B_n la variable aléatoire prenant la valeur 1 si un client se présente au guichet entre les instants $n-1$ et n, et 0 sinon (et le client ainsi arrivé se place au bout de la file d'attente devant le guichet).
Ces variables aléatoires $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ sont supposées indépendantes et prennent la valeur 1 avec la probabilité p (où $0 < p < 1$).
On appelle durée de service d'un client au guichet le temps passé par l'employé du guichet à le servir (une fois son attente dans la file achevée).
Pour préciser, si la durée de service du premier client est égale à n, le guichet est libre pour le service du client suivant à partir de l'instant n. Les variables aléatoires indiquant les durées de service au guichet des clients successifs sont supposées indépendantes et suivent la même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
En particulier, on notera D la variable aléatoire indiquant la durée de service au guichet du client initial.
On convient d'appeler première vague de clients l'ensemble de ceux arrivés au guichet pendant la durée de service

du client initial, puis, de façon générale, on appelle $(k+1)$-ième vague de clients l'ensemble de ceux arrivés pendant la durée de service des clients de la k-ième vague.
On désigne alors par N_k le nombre aléatoire des clients de la k-ième vague (étant entendu que l'on pose $N_k = 0$ s'il n'y a pas de client de k-ième vague). Par convention, on pose $N_0 = 1$.

1. Loi de la variable aléatoire N_1.

   (a) Etant donné un nombre entier naturel n, déterminer la loi de la variable aléatoire N_1 conditionnée par l'événement $D = n$.
   On précisera les expressions des probabilités conditionnelles $P(N_1 = k/D = n)$.

   (b) En déduire à l'aide de la formule des probabilités totales que N_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre et l'espérance.

2. Probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève.

   Dans toute la suite du problème, on convient de poser $p_k = P(N_k = 0)$.

   (a) Prouver que l'événement :

   "la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini"

   (autrement dit: "il n'y a plus personne au guichet au bout d'un temps fin") est la réunion des événements "$N_k = 0$", pour $k \geqslant 1$.
   Montrer que cette suite d'événements $(N_k = 0)_{k\geqslant 1}$ est croissante, et en déduire :
   - que la suite $(p_k)_{k\geqslant 1} = (P(N_k = 0)_{k\geqslant 1}$ est convergente vers une limite $L \leqslant 1$.
   - que la probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini est égale à cette limite L.

   (b) Justifier, pour tout couple (j, k) de nombres entiers naturels, les formules:

   $$P(N_{k+1} = 0/N_1 = 1) = P(N_k = 0) \qquad ; \qquad P(N_{k+1} = 0/N_1 = j) = (P(N_k = 0))^j$$

   (c) En déduire l'expression de $p_{k+1} = P(N_{k+1} = 0)$ en fonction de p_k, préciser p_0 et, à l'aide des résultats de la partie 1, la limite de la suite (p_k) et la probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini.
   On discutera et interprétera le résultat obtenu en fonction des valeurs de λp.

   (d) Déterminer les valeurs exactes ou approchées à 10^{-2} près des probabilités pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini lorsque la durée moyenne de service d'un client au guichet est égale à 1, 2, 4 ou 8 instants tandis que la probabilité pour qu'un client se présente au guichet entre deux instants consécutifs donnés est égale à $0,5$ d'abord, à $0,25$ ensuite.

3. Calcul de l'espérance $E(N_k)$ de la variable aléatoire N_k.
   On convient d'appeler "espérance de la variable aléatoire N_{k+1} conditionnée par l'événement $N_k = i$", et de noter $E(N_{k+1}/N_k = i)$, l'espérance de N_{k+1} lorsque la probabilité est la probabilité conditionnelle sachant l'événement $N_k = i$ réalisé, autrement dit l'espérance définie comme suit (si elle existe) :

   $$(*) \qquad E(N_{k+1}/N_k = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} jP(N_{k+1} = j/N_k = i)$$

   (a) On suppose l'événement $N_k = i$ réalisé. Déterminer alors la loi de la durée de service de ces i clients de la k-ième vague en distinguant les cas $i = 0$ et $i \geqslant 1$.
   En déduire la loi de la variable aléatoire N_{k+1} conditionnée par l'événement $N_k = i$ et vérifier que $E(N_{k+1}/N_k = i) = i\lambda p$.

(b) On suppose que l'espérance $E(N_k)$ existe. Etablir que:

$$E(N_k) = \frac{1}{\lambda p} \sum_{i=0}^{+\infty} P(N_k = i).E(N_{k+1}/N_k = i)$$

En admettant qu'il est alors licite de permuter les symboles $\sum$ dans le calcul, établir l'existence de l'espérance $E(N_{k+1})$ et donner son expression en fonction de λ, p et de l'espérance $E(N_k)$.

(c) En déduire l'existence et l'expression de $E(N_k)$.

(d) Déterminer l'espérance du nombre de clients qui se présentent au guichet jusqu'à ceux de la n-ième vague incluse.

(e) Discuter et interpréter la limite de cette espérance quand n tend vers $+\infty$ pour $\lambda p < 1$. Qu'obtient-on numériquement dans les cas évoqués dans la question 2.d) ?

4. Appendice: le théorème de Fubini sur les séries doubles $\sum \sum v_{i,j}$

Dans cette question indépendante des précédentes, on se propose de justifier la permutation des symboles $\sum$, faite dans la question 2.3. A cet effet, on donne pour tout couple (i, j) de $\mathbb{N}^2$ un nombre réel positif $v_{i,j}$, et l'on note (sous réserve de convergence) pour tout couple (i, j) de $\mathbb{N}^2$:

$$A_i = \sum_{j=0}^{+\infty} v_{i,j} \qquad ; \qquad B_j = \sum_{i=0}^{+\infty} v_{i,j}$$

On se propose donc d'établir l'égalité suivante:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} v_{i,j} \right)$$

l'existence de l'un des deux membres impliquant alors l'existence de l'autre.

(a) On suppose que les séries définissant les nombres A_i sont convergentes, et que la série $\sum A_i$ est convergente. Etablir pour tout couple (p, q) de N^2:

$$\sum_{j=0}^{q} \left(\sum_{i=0}^{p} v_{i,j} \right) = \sum_{i=0}^{p} \left(\sum_{j=0}^{q} v_{i,j} \right) \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_{i,j} \right)$$

En déduire la convergence des séries définissant les nombres B_j et, en faisant tendre p vers $+\infty$, en déduire la convergence de la série $\sum B_j$, puis l'inégalité :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} v_{i,j} \right) \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_{i,j} \right)$$

(b) Quel résultat analogue peut-on obtenir en permutant les hypothèses portant sur les nombres A_i et B_j? Quelle conclusion en tire-t-on ?

(c) Si X et Y désignent deux variables aléatoires à valeurs dans N, préciser enfin sous quelles hypothèses il est licite d'écrire que :

$$E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = i).E(Y/X = i)$$