ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option technologique

MATHEMATIQUES I

Année 1999

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice I: Un problème de placement.

On se propose de comparer les deux placements suivants :

- placer au taux d'intérêt r une somme $2S$ pendant t années.
- placer au taux d'intérêt $2r$. une somme $2S$ pendant t années.

1. Expressions des sommes obtenues à l'issue de t années de placement.
   (a) On place une somme de 25 francs au taux d'intérêt r pendant une année. De quelle somme dispose-t-on à l'issue de l'année de placement ?
   (b) Déterminer la somme $S_1(t)$ obtenue en plaçant au taux d'intérêt r une somme de 25 francs durant t années.
   (c) On place une somme de S francs au taux d'intérêt $2r$ pendant une année. De quelle somme dispose-t-on à l'issue de l'année de placement ?
   (d) Déterminer la somme $S_2(t)$ obtenue en plaçant au taux d'intérêt $2r$ une somme de S francs durant t années.
   (e) Déterminer en fonction de r le nombre réel t défini par l'égalité $S_1(t) = S_2(t)$.
2. Etude du temps d'égalisation des sommes obtenues en fonction de r.
   On pose pour tout nombre réel strictement positif r :
   $$T(r) = \frac{\ln 2}{\ln(1+2r) - \ln(1+r)}$$

(a) Déterminer la dérivée et le sens de variation sur $]0;+\infty[$ de la fonction $r \longmapsto \ln(1+2r) - \ln(1+r)$.
(b) En déduire le sens de variation de $T(r)$ lorsque r croît de 0 à $+\infty$.
(c) Déterminer les limites de $T(r)$ lorsque r tend vers 0 et $+\infty$, et un équivalent de $T(r)$ lorsque r tend vers 0.

Exercice II : Probabilités.

On rappelle que, si x désigne un nombre réel strictement compris entre 0 et 1, alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Une expérience aléatoire consiste à lancer deux dés équilibrés simultanément, et l'on répète indéfiniment cette expérience.

1. Etude du temps d'attente pour obtenir un double six.
   On note T la variable aléatoire indiquant le numéro de l'expérience aléatoire où l'on obtient pour la première fois un double six (c'est à dire où les deux dés donnent simultanément un six).
   (a) Quelle est la probabilité $P(T=1)$ pour qu'un double six soit obtenu à la première expérience ?
   (b) Quelle est la probabilité $P(T=n)$ pour que ce soit à la $n^{ième}$ expérience que, pour la première fois, les deux dés amènent simultanément un six ($n \geqslant 1$) ?
   (c) Déterminer la somme de la série de terme général pour $P(T=n)$ pour $n \geqslant 1$.
   (d) Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T.

2. Etude du temps d'attente pour qu'au moins un dé ait amené un six.
   On note T' la variable aléatoire indiquant le numéro de l'expérience aléatoire où l'on obtient pour la première fois un six (c'est à dire où l'un des deux dés au moins donne un six).
   (a) Quelle est la probabilité pour qu'aucun six ne soit obtenu à la première expérience, et que vaut $P(T'=1)$?
   (b) Quelle est la probabilité $P(T'=n)$ pour que ce soit à la $n^{ième}$ expérience que, pour la première fois, l'un des dés amène un six ?
   (c) Déterminer la somme de la série de terme général $P(T'=n)$ pour $n \geqslant 1$.
   (d) Déterminer (sous forme de fraction irréductible) l'espérance $E(T')$ de la variable aléatoire T'.

3. Etude du temps d'attente pour que chacun des dés ait amené un six.
   On note T'' la variable aléatoire indiquant le numéro de l'expérience aléatoire où, pour la première fois, chacun des dés a amené au moins un six (si on représente par un couple (x,y) le résultat indiquant les numéros x et y amenés par le premier et le second dés, et si les résultats des expériences sont, dans cet ordre $(1,4)$, $(6,5)$, $(6,2)$, $(2,4)$, $(3,6)$, etc, alors T'' prend la valeur 5 car c'est à ce moment là que, pour la première fois, chacun dés dés a amené au moins un six).
   (a) Quelle est la probabilité pour qu'un dé n'amène aucun six au cours de ses n premiers jets? Pour qu'un dé amène au moins un six au cours de ses n premiers jets ?
   (b) Quelle est la probabilité $P(T'' \leqslant n)$ pour que chacun dés dés ait amené au moins un six au cours des n premiers jets ($n \geqslant 1$) ?
   (c) Quelle est la probabilité $P(T''=n)$ pour que ce soit à la $n^{ième}$ expérience que, pour la première fois, chacun des dés ait amené au moins un six ($n \geqslant 1$) ?
   (d) Déterminer la somme de la série de terne général $P(T''=n)$ pour $n \geqslant 1$.
   (e) Déterminer (sous forme de fraction irréductible) l'espérance-$E(T'')$ de la variable aléatoire T''.

4. Comparer les trois espérances $E(T)$, $E(T')$, et $E(T'')$.

Exercice III : Analyse.

1. Etude d'une fonction auxiliaire.

   (a) Calculer, pour $0 < x \leqslant 1$, la dérivée de la fonction définie par $h(x) = -\ln(x) + x - 1$.

   (b) Dresser le tableau de variation de h, et en déduire le signe de $h(x)$ pour $0 < x \leqslant 1$.

2. Etude sur $]0;1[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x \ln x}{x-1}$.

   On considère la fonction définie pour $0 < x < 1$ par :

   $$S(x) = \frac{x \ln x}{x-1}$$

   (a) Déterminer la dérivée de la fonction $x \longmapsto x \ln x$ et la valeur du nombre dérivé pour $x = 1$. En déduire la limite de $S(x)$ quand x tend vers 1.

   (b) Déterminer la limite de $S(x)$ quand x tend vers 0.
   On supposera désormais que cette fonction S est prolongée par continuité en 0 et en 1 par les limites précédentes.

   (c) Calculer la dérivée de S sur $]0;1[$ et vérifier que $S'(x)$ est du signe de $h(x)$. En déduire alors le sens de variation de S que l'on représentera graphiquement sur $[0;1]$.
   (On pourra étudier les tangentes à la courbe représentative de S en 0 et 1 afin de les placer).

3. Etude sur $]0;1]$ des fonctions $x \longmapsto x \ln x$

   On considère un nombre entier donné,et la fonction définie pour $0 < x \leqslant 1$ par :

   $$f_n(x) = -x^n \ln(x)$$

   (a) Déterminer la limite de $f_n(x) = -x^n \ln(x)$, lorsque x tend vers 0. On supposera désormais que cette fonction, est prolongée par continuité en 0 par la limite précédente.

   (b) Calculer la dérivée de f_n sur $]0;1]$. En déduire alors le sens de variation de f_n, et représenter graphiquement sur la figure précédente les fonctions f_n sur $[0;1]$ pour $n = 1$ et 2 (on rappelle à cet effet que $1/e$ est approximativement égal à 0.36).

   (c) Déterminer à l'aide d'une intégration par parties la valeur de l'intégrale suivante :

   $$I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

4. Etude de la somme des fonctions f_n

   (a) Déterminer, pour tout nombre réel tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$ et tout nombre entier n tel que $n \geqslant 1$, l'expression factorisée de la somme suivante :

   $$S_n(x) = -\sum_{k=1}^{n} \ln(x)$$

   (b) Vérifier que, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$.

   (c) Vérifier que,pour ,puis en déduire que l'intégrale de S sur $[0;1]$ est la limite des intégrales de S_n sur $[0;1]$ lorsque n tend vers $+\infty$, autrement dit que :

   $$\int_0^1 \frac{x \ln x}{x-1}\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

   (On peut prouver que cette dernière somme est égale à $\dfrac{\pi^2}{6} - 1$.