ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option technologique

MATHEMATIQUES I

Année 2001

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 (Etude de placements)

On place sur un compte rémunéré au taux d'intérêt annuel de 5% une somme S_n au 1^{er} Janvier de l'année 0, puis on verse au 1^{er} Janvier de chacune des années suivantes la même somme S.
Pour tout nombre entier naturel n, on désigne par S_n la somme (intérêts compris bien entendu) dont on dispose sur ce compte au 1^{er} Janvier de la $n^{ème}$ année de placement.

1. Expression de la somme S_n obtenue au premier Janvier de l'année n
   (a) Préciser les sommes S_0 et S_1.
   (b) Etablir pour tout nombre entier naturel n la relation $S_{n+1} = 1.05S_n + S$.
   (c) Pour tout nombre entier naturel n, on pose ici $T_n = S_n + 20S$.
   Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n, puis en déduire T_n et S_n en fonction de S et de n.
   (d) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $S_n \geqslant 15S$.
   On donne a cet effet à 10^{-2} près les égalités: $\ln(35) = 3,55$, $\ln(21) = 3,04$, $\ln(1,05) = 0,05$.

2. Modification du taux d'intérêt annuel du placement
   On reprend la situation précédente, mais le taux d'intérêt annuel est maintenant égal à 10% (et non plus à 5% comme précédemment).
   (a) Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n, puis en déduire S_n en fonction de S et de n.
   (b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $S_n \geqslant 15S$.
   On donne à cet effet à 10^{-2} près les égalités: $\ln(25) = 3,22$, $\ln(11) = 2,40$, $\ln(1,1) = 0,10$.

Exercice 2 (Etude d'une équation)

Pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, on considère l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$ où l'inconnue x est recherchée dans $[0, +\infty[$ seulement. On étudiera (E_n) à l'aide de la fonction auxiliaire f:

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$$

1. Existence et unicité d'une racine positive x_n de (E_n)

   (a) Résoudre l'équation pour $n = 1$ et $n = 2$

   (b) Étudier les variations de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$ sur $[0, +\infty[$ pour $n \geqslant 1$.
   En déduire que I'équation (E_n) admet une et une seule racine positive qu'on notera x_n, et montrer que $0 < x_n < 1$ pour $n \geqslant 1$.

2. Etude de la fonction auxiliaire.

   (a) Déterminer le domaine de définition de f et les limites de f aux extrémités de celuici.

   (b) Calculer alors $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f.

3. Etude de la suite (x_n)

   (a) Montrer que $f(x_n) = n$ pour $n \geqslant 1$.

   (b) Montrer l'inégalité $x_n < x_{n+1}$ pour $n \geqslant 1$.

   (c) En déduire la convergence de la suite (x_n) vers un nombre réel L, et préciser la valeur de L.

Exercice 3 (Probabilités)

1. Calculs préliminaires

   (a) On considère deux nombres entiers naturels q et n tels que $n \geqslant q$.
   Etablir que $C_{n+1}^{q+1} + C_{n+1}^{q} = C_{n+2}^{q+1}$
   En raisonnant par récurrence sur n, en déduire la formule suivante : $\sum\limits_{k=q}^{n} C_k^q = C_{n+1}^{q+1}$

   (b) En faisant $q = 1, 2, 3$, en déduire une expression factorisée des trois sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k \quad \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \quad \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)$$

   On considère dans toute la suite de cette partie un nombre entier $n \geqslant 2$ et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n.
   0n extrait de cette urne 2 jetons tirés au hasard et on désigne alors par :
   X la variable aléatoire indiquant le plus petit des numéros des 2 jetons tirés.
   Y la variable aléatoire indiquant le plus grand des numéros des 2 jetons tirés.
   0n notera $E(X)$ et $V(X)$, $E(Y)$ et $V(Y)$ les espérances et variances des variables aléatoires X, Y.

2. Lois des variables aléatoires X et Y

   (a) Quel est le nombre de parties à 2 éléments d'un ensemble à j (respectivement n) éléments ?
   En déduire la probabilité $P(Y \leqslant j)$ et montrer que $P(Y = j) = \dfrac{2(j-1)}{n(n-1)}$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$.

   (b) En raisonnant de même, déterminer les probabilités $P(X \geqslant i)$ et $P(X = i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

(c) Comparer les lois des variables aléatoires $n+1-X$ et Y, autrement dit les deux probabilités $P(n+1-X = j)$ et $P(Y = j)$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$.
En déduire que $E(n+1-X) = E(Y)$ et $V(n+1-Y) = V(Y)$, puis en déduire les expressions de $E(X)$ en fonction de $E(Y)$ et de $V(X)$ en fonction de $V(Y)$.

3. Espérances et variances des variables aléatoires X et Y

   (a) Exprimer sous forme factorisée les espérances $E(Y)$, puis $E(X)$ en fonction de n.

   (b) Exprimer sous forme factorisée $E[(Y(Y2)]$, puis $E(Y^2)$, $V(Y)$ et $V(X)$ en fonction de n.

4. Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

   (a) Montrer que la probabilité $P(X \cap Y = j)$ est égale à $\dfrac{2}{n(n-1)}$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

   (b) En déduire sous forme factorisée l'espérance $E[X(Y2)]$ et montrer que :

$$E(XY) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$

   (c) En déduire sous forme factorisée la covariance et le coefficient de corrélation de X et Y.
   On remarquera que ce coefficient de corrélation linéaire de X et Y est indépendant de n.