ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option technologique

MATHEMATIQUES I

Année 2002

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE 1 Comparaison de deux placements

1. **Etude d'une fonction auxiliaire**
   On considère la fonction définie pour tout nombre réel positif x par :
   $$F(x) = x^3 + 4x^2 + 6x - 1.$$
   (a) Déterminer le sens de variation de F sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Déterminer les valeurs prises par F en 0, 1/2, 1 et sa limite en $+\infty$.
   (c) Prouver que F s'annule une fois et une seule sur $[0, +\infty[$ en un point $r*$ compris entre 0 et 1/2, et déterminer le signe de F sur $[0, r*[$ et sur $]r*, +\infty[$.

2. **Détermination de valeurs approchées de r∗**
   On considère la fonction définie pour tout nombre réel positif x par :
   $$G(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 6}.$$
   (a) Déterminer un encadrement de $x^2 + 4x + 6$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1/2$ et en déduire que :
   $$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant G(x) \leqslant \frac{1}{2}.$$

(b) Déterminer la dérivée G' de G et en déduire que :

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \left|G'(x)\right| \leqslant \frac{5}{36}.$$

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = G(u_n)$.

(c) Prouver par récurrence que tous les nombres réels u_n, appartiennent à $[0, 1/2]$.

(d) Prouver que $G(r*) = r*$ et déduire de l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - r^*| \leqslant \frac{5}{36} |u_n - r^*| .$$

(e) Prouver que $\left|u_0 - r^* \leqslant \dfrac{1}{2}\right|$ et en déduire que $u_2 = 0,149...$ est une approximation de r^* à $0,01$ près. Donner plus généralement une majoration de $|u_n - r^*|$ en fonction de n et prouver que la suite (u_n) converge vers $r*$.

(f) Montrer que $u_0 \leqslant r^* \leqslant u_1$, puis que $u_2 \leqslant r^* \leqslant u_1$ et en déduire l'encadrement $0,149 \leqslant r^* \leqslant 0,151$.. Prouver plus généralement l'encadrement suivant de $r*$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n} \leqslant r^* \leqslant u_{2n+1}.$$

3. **Etude d'un placement sur 4 ans**
On note r le taux annuel des placements (ainsi, $r = 0,05$ correspond à un placement à 5% l'an. Dans ces conditions, on sait que le placement d'une somme S conduit donc après 4 années à l'obtention d'une somme $S_4 = (1+r)^4 S$.
On étudie parallèlement le placement suivant de la somme S, également sur une durée de 4 années. La somme S est rémunérée au taux $r/2$ pendant la $1^{ère}$ année, au taux r pendant la $2^{ème}$ année, au taux $3r/2$ pendant la $3^{ième}$ année, au taux $2r$ pendant la $4^{ième}$ année, mais les intérêts ne sont pas composés de sorte qu'on obtient donc à l'issue des 4 années de placement :

- la somme initiale S.
- les intérêts $r\,S/2$ de la $1^{ère}$ année.
- les intérêts rS de la $2^{ème}$ année.
- les intérêts $3r\,S/2$ de la $3^{ième}$ année.
- les intérêts $2r\,S$ de la $4^{ième}$ année.

(a) Quelle somme S'_4 obtient-on ainsi à la fin des quatre années de placement ?
En déduire la différence $S_4 - S'_4$ en fonction de r et $F(r)$.

(b) Pour quelles valeurs de r faut-il préférer le placement décrit, ici au placement au taux d'intérêt r ?

EXERCICE II : Etude d'une marche aléatoire

1. **Résolution d'un système d'équations**
On considère le système de trois équations suivant où y_1, y_2, y_3 sont des nombres réels donnés, et où les inconnues sont x_1, x_2, x_3 :

$$\left\{\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= y_1 \\ x_2 - 2x_3 &= y_2 \\ x_3 &= y_3 \end{aligned}\right. \qquad \text{qu'on écrira matriciellement sous la forme } PX = Y$$

X désignant ci-dessus la matrice-colonne dont les éléments (de haut en bas) sont x_1, x_2, x_3 et Y la matrice-colonne dont les éléments (de haut en bas) sont y_1, y_2, y_3.

(a) Préciser la matrice P de ce système.

(b) Résoudre le système d'équations précédent.

(c) En déduire la matrice inverse P^{-1}.

2. **Calculs matriciels préliminaires**
On considère la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(a) Expliciter le produit matriciel $D = P^{-1}MP$ et vérifier que la matrice D est diagonale.

(b) En déduire que $M = PDP^{-1}$, puis que $M^n = PD^nP^{-1}$ pour tout nombre entier naturel n.

(c) Expliciter alors les matrices D^n et M^n (on vérifiera le calcul effectué en faisant $n = 0$ et $n = 1$).

3. **Etude d'une marche aléatoire**
Un individu se déplace sur les trois points A_0 d'abscisse 0, A_1 d'abscisse 1 et A_2 d'abscisse 2 selon les règles suivantes :

- A l'instant initial 0, il est au point d'abscisse 2..
- S'il est au point d'abscisse 2 à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), il est de façon équiprobable en l'un des 3 points d'abscisses 0, 1 ou 2 à l'instant $n + 1$.
- S'il est au point d'abscisse 1 à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), il est de façon équiprobable en l'un des 2 points d'abscisses 0 ou 1 à l'instant $n + 1$.
- S'il est au point d'abscisse 0 à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), il reste au point d'abscisse 0 à l'instant $n + 1$..

Pour tout nombre entier naturel n, on désigne par X_n la variable aléatoire indiquant l'abscisse du point où se trouve l'individu à l'instant n et par $E(X_n)$ son espérance.

(a) Exprimer à l'aide du théorème des probabilités totales les probabilités $P(X_{n+1} = 0)$, $P(X_{n+1} = 1)$ et $P(X_{n+1} = 2)$ en fonction des probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

(b) En déduire une matrice M d'ordre 3 telle que $U_{n+1} = M\,U_n$ où U_n, désigne la matrice-colonne dont les éléments (de haut en bas) sont $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

(c) Exprimer le produit matriciel $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} M$ en fonction de la matrice-ligne $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
En multipliant à gauche par la matrice-ligne $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ l'égalité matricielle $U_{n+1} = M\,U_n$, exprimer $E(X_{n+1})$ en fonction de $E(X_n)$. En déduire $E(X_n)$ en fonction de n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

(d) Préciser U_0 et exprimer U_n, en fonction de M^n et U_0.
En déduire $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$ et leurs limites quand n tend vers $+\infty$, puis retrouver à l'aide de ces résultats l'espérance $E(X_n)$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.