ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option économique

MATHEMATIQUES III

Année 2003

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 : Suites récurrentes et algèbre linéaire

Soit a un nombre réel. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$, et F le sous- ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 3a \times u_{n+1} + (1-3a)\, u_n.$$

L'objet de ce problème est l'étude de l'ensemble F .

I. Étude du cas particulier $a = 1$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par ses trois premiers termes $u_0,\ u_1, u_2$, et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+3} = 3\, u_{n+1} - 2\, u_n.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et on note M la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1. Reconnaître, pour tout entier naturel n , le produit $M\, X_n$.
   En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n.

2. (a) Déterminer les valeurs propres de la matrice M et leur sous-espace propre associé.
   (b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M , c'est-à-dire tel que M soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Déterminer une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que la matrice T de f dans $\mathcal{B}'$ vérifie $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 aient respectivement pour première composante 1, 1 et 0.

   (b) Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de T^n

4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}$ ' . Exprimer M en fonction de T , P et P^{-1}, puis M^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.

5. (a) Calculer P^{-1}(les calculs devront figurer sur la copie)

   (b) Pour tout entier naturel n, calculer les coefficients de la première ligne de M^n ; en déduire l'expression de u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et de l'entier naturel n.

II . Étude du cas général .

On revient au cas général où a est un réel quelconque.

1. **Structure de F .**

   (a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

   (b) On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} F & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_n & \mapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$.
   Démontrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels ; en déduire que F est de dimension finie et préciser sa dimension.

   (c) Justifier que des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F forment une base de F si, et seulement si, la matrice $\begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix}$ est inversible.

   (d) On suppose dans cette question : $a = 0$.
   On note $s,\ s', s''$ les suites définies par :

   $$s = \varphi^{-1}\left((1,0,0)\right),\ s' = \varphi^{-1}\left((0,1,0)\right),\ s'' = \varphi^{-1}\left((0,0,1)\right)$$

   Déterminer $s,\ s', s''$ (on donnera les dix premiers termes de chacune de ces trois suites); en déduire la forme générale d'un élément de F .

   (e) Reprendre la question précédente dans le cas $a = \dfrac{1}{3}$

2. **Suites géométriques de F .**

   (a) Démontrer que la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F si, et seulement si, le réel r est racine de la fonction polynomiale

   $$p : x \rightarrow x^3 - 3ax + 3a - 1$$

   (avec la convention : $0^0 = 1$)

   (b) Déterminer, en fonction du réel a , le nombre de racines de la fonction p ainsi que leur valeur.

3. **Cas où p admet trois racines distinctes.**

   (a) Démontrer que, lorsque la fonction p admet trois racines distinctes 1, r_1 et r_2, les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $((r_1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((r_2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de l'espace vectoriel F

(b) Dans le cas où $a = 7$, exprimer, en fonction de l'entier naturel n , le terme général u_n de la suite, appartenant à F , qui vérifie :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 10, \quad u_2 = -8$$

4. **Cas où p admet une racine double.**

(a) Soit r un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général nr^n. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+3} - 3a \times u_{n+1} - (1-3a)\, u_n = r^n \left(n \times p(r) + r \times p'(r)\right)$$

(b) En déduire que, lorsque p admet une racine double r_0 et une racine simple r_1 la suite $(n\, {r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F , et démontrer que les suites $((r_0)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n(r_0)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((r_1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F .

(c) Dans le cas où $a = \dfrac{1}{4}$, exprimer le terme général u_n d'un élément quelconque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F en fonction de u_0, u_1 et u_2 et de l'entier naturel n; préciser la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 : probabilités et simulation informatique.

I. Exemple introductif.

On effectue des lancers successifs (indépendants) d'un dé cubique équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on note $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$, les variables aléatoires donnant le numéro amené par le dé aux premier lancer, deuxième lancer, ...

Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n, la somme des points obtenus aux n premiers lancers.

Enfin, pour tout entier naturel k non nul, la variable aléatoire T_k compte le nombre de celles des variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ qui prennent une valeur inférieure ou égale à k .

Par exemple, si les cinq premiers numéros amenés par le dé sont, dans l'ordre : 3, 1, 2, 3, 6, alors les événements suivants sont réalisés :

$$(Y_1 = 3), (Y_2 = 4), (Y_3 = 6), (Y_4 = 9), (Y_5 = 15),$$

et les variables aléatoires T_{2} , T_{3} , T_{9} et T_{12} prennent respectivement pour valeurs 0, 1, 4 et 4 .

1. **On s'intéresse dans cette question à la variable aléatoire T_{12}.**

(a) Donner les valeurs prises par T_{12}
(On explicitera un exemple de résultat correspondant à chacune des deux valeurs extrêmes).
Quelle est la probabilité que T_{12} prenne la valeur 12 ?

(b) Simulation informatique
Compléter les lignes marquées par les symboles . . . du programme Pascal ci-dessous, de façon qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur de T_{12}.
On rappelle que `random(6)` fournit un entier aléatoire parmi 0, 1, 2, 3, 4, 5 .

```
Program ESSEC2003A;
var x,y,t :integer;
begin
     randomize;
     y :=0;t :=0;
     repeat
          x :=random(6)+1;
          y :=...;
          t :=...;
     until ...;
     writeln(T=',t);
end.
```

2. **On s'intéresse dans cette question à la variable aléatoire T_2**

   (a) Déterminer la loi de probabilité de T_2.

   (b) Qu'obtient-on à l'affichage en exécutant le programme ci-dessous ?

```
program Essec2003B;
var i,d1,d2 :integer;
loi :array[0..2] of integer;
begin
     for i :=0 to 2 do loi[il :=0;
     for d1 :=1 to 6 do for d2 :=1 to 6 do
          if d1 > 2 then loi[0] :=loi[0]+1 else
               if d1+d2 > 2 then loi[1] :=Ioi[1]+1
                    else loi[2] :=Ioi[2]+1;
     for i :=0 to 2 do write(loi[i]/36);
end.
```

Dorénavant, on considère une suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega;\mathcal{T};P)$, mutuellement indépendantes, de même loi, à valeurs positives ou nulles.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose alors : $Y_n = X_1+X_2+\cdots+X_n$ et on note F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_n.

On fixe un réel strictement positif x , et on s'intéresse au nombre T_x des variables aléatoires Y_n telles que l'événement $(Y_n \leqslant x)$ soit réalisé.

II. Cas général.

1. Démontrer que la suite$(F_n(x))_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

2. Démontrer chacune des deux relations suivantes :

   - $P(T_x = 0) = 1 - F_1(x)$
   - pour tout entier naturel n non nul, $P(T_x = n) = F_n(x) - F_{n+1}(x)$

3. En déduire l'équivalence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(T_x = n) = 1 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$$

   Autrement dit, T_x est une variable aléatoire si, et seulement si : $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$

III. Cas d'une loi géométrique.

Dans cette troisième partie, les variables aléatoires X_i, $i \in \mathbb{N}^{\times}$, suivent la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre p , $(0 < p < 1)$, et on pose : $q = 1 - p$.

De plus, x est ici un entier naturel non nul fixé.

On rappelle que, par convention : $C_n^m = 0$ si n et m sont des entiers naturels tels que $m > n$.

1. Loi de Y_n, $n \in \mathbb{N}^{\times}$

   (a) Préciser $Y_n(\Omega)$

   (b) Par un calcul de loi de somme, déterminer la loi de Y_2, puis celle de Y_3.

   (c) Démontrer que, pour tous entiers naturels m et n tels que $m \geqslant n$, on a l'égalité :

$$\sum_{k=n}^{m} C_k^n = C_{m+1}^{n+1}$$

(d) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$P(Y_n = k) = C_{k-1}^{n-1} q^{k-n} p^n$$

si k est un entier supérieur ou égal à n.

2. Calcul de $P(T_x = n)$.

(a) Justifier que T_x est une variable aléatoire et préciser $T_x(\Omega)$.
Calculer $P(T_x = 0)$

(b) Vérifier chacune des deux égalités :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= p^n \sum_{k=n}^{x} C_k^n q^{k-n} - qp^n \sum_{k=n+1}^{x} C_{k-1}^n q^{k-n-1} \\ F_{n+1}(x) &= p^{n+1} \sum_{k=n+1}^{x} C_{k-1}^n q^{k-n-1} \end{aligned}$$

En utilisant **II.2.** , en déduire le calcul de $P(T_x = n)$ pour n entier supérieur ou égal à 1.

(c) Reconnaître la loi de T_x ; préciser son espérance et sa variance.

3. Sachant que les variables aléatoires $X_1, X_2 \ldots$ sont des temps d'attente, et en observant que la réalisation de n premiers succès équivaut à la réalisation du $n^{ième}$ succès, donner une interprétation , soigneusement exposée, de chacune des variables aléatoires Y_n et T_x, et retrouver ainsi la loi de T_x.

IV. Cas d'une loi exponentielle.

Dans cette dernière partie, les variables aléatoires X_n suivent la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.
On admettra qu'alors Y_n admet pour densité la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} t^{n-1} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

1. À l'aide de **II.2.** , calculer $P(T_x = 0)$, puis $P(T_x = n)$ pour tout entier naturel n non nul.

2. Reconnaître la loi de T_x ; préciser son espérance et sa variance.