ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option technologique

MATHEMATIQUES I

Année 2003

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE 1 : Calcul de $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \ln(\dfrac{n!}{n^n})$

1. **Etude d'une fonction**
   Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$par : $f(t) = t - 1 - \ln t$

   (a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

   (b) Justifier la dérivabilité de f sur $]0;+\infty[$ et déterminer f ?

   (c) Dresser le tableau de variations de f.

   (d) Représenter l'allure de la courbe d'équation $y = f(t)$ dans un repère orthonormé pour tout réel t compris entre 0 et 4.
   On donne à cet effet les approximations suivantes : $\ln(2) \approx 0,7$ et $\ln(3) \approx 1,1$

2. **Calcul d'intégrale**.

   (a) Soit $x$un réel de $]0;1[$.Justifier l'existence de l'intégrale : $\int\limits_x^1 f(t)dt$.

   (b) Montrer que la fonction $t \longmapsto t\ln t - t$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et déterminer sa dérivée.

   (c) En déduire le calcul de $\int\limits_x^1 f(t)dt$ et montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \int\limits_x^1 f(t)dt = \dfrac{1}{2}$.

3. **Calcul d'une somme et encadrement de celle-ci par la méthode des rectangles**
   Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On rappelle que : $n! = 1 \times 2 \times .... \times n$.

(a) Démontrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{k}{n}) = \ln(\frac{n!}{n^n}).$$

(b) En déduire l'égalité (1) suivante :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \frac{n+1}{2n} - 1 - \frac{1}{n}\ln(\frac{n!}{n^n}).$$

(c) Soit k un entier tel que $2 \leqslant k \leqslant n$. En utilisant la monotonie de f sur $]0;1]$, démontrer que :

$$\forall t \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}], \quad f(\frac{k}{n}) \leqslant f(t)$$

et en déduire que :

$$\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)dt$$

(d) Déduire du résultat précédent l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f(\frac{k}{n}) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt.$$

(e) A l'aide d'une démarche analogue à celle qui vient d'être effectuée, montrer que :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n})$$

(f) Déduire alors à l'aide des deux inégalités précédentes l'encadrement ci-dessous :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \leqslant \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$$

4. **Conclusion**

(a) Déduire du dernier encadrement le résultat suivant :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{2}$$

(b) Déterminer ,à l'aide de l'égalité(1), la valeur de la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln(\frac{n!}{n^n}).$$

EXERCICE II :Suites récurrentes

On considère trois suites réelles $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leur premier terme :

$$u_0 = 5, v_0 = 3, w_0 = 1$$

et les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = u_n + 4v_n \\ v_{n+1} = 4u_n + v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{array} \right.$$

On se propose d'exprimer les termes de ces trois suites en fonction de l'entier naturel n et ce, de deux manières distinctes.

1. **Première méthode**

   (a) Démontrer que la suite $(u_n + v_n)$ est géométrique de raison 5 et en déduire ,pour tout entier naturel n, l'expression de $u_n + v_n$ en fonction de n.

   (b) Démontrer que la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique et en déduire ,pour tout entier naturel n, l'expression de $u_n - v_n$ en fonction de n.

   (c) Déduire des deux questions précédentes les expressions de u_n et de v_n en fonction de l'entier naturel n.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^\times$. En remarquant que pour tout entier naturel k, $v_k = w_{k+1} - w_k$, exprimer la somme :

   $$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$$

   en fonction de w_n ; en déduire l'expression de w_n en fonction de n et vérifier que cette formule reste valable pour le cas $n = 0$.

2. **Deuxième méthode**

   Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on note X_n, la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

   (a) Reconnaître le résultat du produit matriciel AX_n.

   (b) Montrer alors par récurrence que , pour tout entier naturel n :

   $$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (c) On pose $P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}

   (d) On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D et en déduire D^n pour tout entier naturel n

   (e) Démontrer que ,pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nP^{-1}$, puis calculer A^n.

   (f) Retrouver les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de l'entier naturel n.

EXERCICE III :Probabilités

Une usine fabrique des pièces mécaniques. Chaque pièce a une probabilité de présenter un défaut égal à p, $(0 < p < 1)$ et ce de manière indépendante. On prend au hasard un échantillon de N pièces ($N \in \mathbb{N}^{\times}$).

1. On note D la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon. Reconnaître la loi suivie par D ; préciser la valeur de son espérance ainsi que celle de sa variance.

2. Déterminer en fonction de p et de N les probabilités $P(D = 0)$ et $P(D \geqslant 1)$

   Deux tests sont mis en place : le test T_1 permet de savoir si une pièce quelconque est défectueuse et son coût est posé égal à 1, le test T_2 permet de savoir si au moins une pièce est défectueuse dans un échantillon de taille quelconque et son coût, cinq fois supérieur à celui du test T_1 est posé égal à 5.
   Pour dépister les éléments défectueux de l'échantillon de N pièces, une première stratégie consiste à tester les pièces une à une à l'aide de T_1.

3. Combien cette première stratégie nécessite-t-elle de tests T_1 ? Quel est son coût ?

   Une seconde stratégie consiste à effectuer T_2 sur la totalité de l'échantillon puis, si celui-ci s'avère positif, à tester alors toutes les pièces une à une à l'aide de T_1

4. On note X la variable aléatoire égale au coût de cette seconde stratégie.

   (a) Montrer que X ne prend que deux valeurs qui sont 5 et $5 + N$

   (b) Montrer que $P(X = 5) = (1 - p)^N$. Que vaut $P(X = 5 + N)$?

   (c) Quel sens peut-on donner à l'espérance de la variable aléatoire X ? La calculer.

5. Montrer qu'en moyenne, la seconde stratégie est moins coûteuse que la première si et seulement si p et N vérifient l'inégalité suivante :
$$p < 1 - (\frac{5}{N})^{\frac{1}{N}}$$

6. Calculer la limite de $1 - (\frac{5}{N})^{\frac{1}{N}}$ quand N tend vers $+\infty$ et en déduire qu'à p fixé, la seconde stratégie s'avère en moyenne plus onéreuse si la taille N de l'échantillon testé est très importante. Comment peut-on expliquer cela ?
   Afin de remédier à ce problème, on partage l'échantillon de N pièces en k échantillons de n pièces (on a donc $N = kn$). On applique alors la seconde stratégie à chacun des k échantillons. On note X_i ($(1 \leqslant i \leqslant k)$la variable aléatoire égale au coût de la détection des pièces défectueuses du ième échantillon et on note Y la variable aléatoire égale au coût total.

7. Exprimer Y en fonction de $X_1, X_2, ..., X_k$. et montrer que
$$E(Y) = N(\frac{5}{n} + 1 - (1 - p)^n)$$

   On admet que si le réel p est très petit devant 1, $(1 - p)^n$ est très proche de $1 - np$. En utilisant cette approximation, on admet que
$$E(Y) = N(\frac{5}{n} + np)$$

8. Dans le cas où $p = 0,002$ et $N = 1000$,montrer que l'espérance de Y est minimale pour une valeur de n à préciser.