ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Année 2004

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations

Dans ce problème, on désigne par n un nombre entier naturel non nul et on convient d'identifier tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$ à la matrice-colonne de ses composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

La transposée d'une telle matrice X est la matrice-ligne ${}^tX = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Le produit scalaire canonique d'un vecteur X et d'un vecteur Y de $\mathbb{R}^n$ est alors égal à :

$$< X, Y >= {}^tXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

La norme euclidienne de X est définie par $\|X\| = \sqrt{< X, X >}$ et on dira qu'une suite de vecteurs (X_p) de $\mathbb{R}^n$ converge vers un vecteur X de $\mathbb{R}^n$ si la suite $\|X_p - X\|$ converge vers 0.
Pour finir, on désigne par

- I la matrice-identité d'ordre n
- A une matrice symétrique réelle d'ordre n.

Partie I : Etude d'une suite de vecteurs

1. Dans cette question, on note C un vecteur non nul de composantes $c_1, c_2 \ldots, c_n$ de $\mathbb{R}^n$.

   (a) Expliciter le produit matriciel $C\ {}^tC$. La matrice $C\ {}^tC$ est-elle diagonalisable ?

   (b) Exprimer $(C\ {}^tC)^2$ en fonction de $C\ {}^tC$ et de la norme de C.

   (c) En déduire que toute valeur propre de $C\ {}^tC$ est égale à 0 ou à $\|C\|^2$.

   (d) Préciser le sous-espace propre associé à 0.
   Calculer $C\ {}^tCC$ en fonction de C et préciser le sous-espace propre associé à $\|C\|^2$.

   (e) En déduire la nature de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $C\ {}^tC$.
   Montrer qu'il s'agit d'une projection orthogonale lorsque le vecteur C est unitaire.

2. Dans cette question, on désigne par X et Y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

   (a) Établir que

   $$ {}^tXY = {}^tYX, \quad {}^tXAY = < X, AY > = < AX, Y >, \quad ({}^tXY)^2 = {}^tX(Y\ {}^tY)X = {}^tY(X\ {}^tX)Y. $$

   (b) Justifier l'existence d'une base orthonormale de vecteurs $U_1, U_2, \ldots, U_n$ de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels existent des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que $AU_1 = \lambda_1 U_1,\ AU_2 = \lambda_2 U_2, \ldots, AU_n = \lambda_n U_n$.

   (c) Exprimer les vecteurs X et AX dans la base $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ ainsi que leurs normes à l'aide des produits scalaires $< U_i, X >$ et $< U_i, AX >$ où $1 \leqslant i \leqslant n$, puis prouver l'égalité suivante :

   $$ < X, AX > = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i < U_i, X >^2 $$

   (d) En déduire les égalités matricielles suivantes :

   $$ I = \sum_{i=1}^{n} U_i\ {}^tU_i \quad \text{et} \quad A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i\ {}^tU_i $$

   Reconnaître les endomorphismes canoniquement associés aux matrices $U_i^t U_i$.

   (e) En déduire les inégalités suivantes :

   $$ \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (\lambda_i) \|X\|^2 \leqslant \ < X, AX > \ \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (\lambda_i) \|X\|^2 $$

   (f) **Application** : encadrer par deux nombres entiers les valeurs propres de la matrice d'ordre n définie ci-dessous (tous les éléments sont nuls, sauf sur les trois diagonales centrales)

   $$ A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots -1 & \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} $$

3. Dans cette question, on note $\rho(A) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (|\lambda_i|)$.

   (a) Vérifier que $\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 < U_i, X >^2$.
   Prouver que $\|AX\| \leqslant \rho(A) \|X\|$ et exhiber un vecteur réalisant l'égalité.

   (b) Établir l'équivalence des deux propositions suivantes

      i. Pour tout vecteur X, la suite $(A^p X)$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$

      ii. $\rho(A) < 1$.

Partie II : Un problème de minimisation

Dans toute cette partie, $\mathbb{R}_p[X]$ désigne l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à p et α, β sont deux réels vérifiant $0 < \alpha < \beta$.
On se propose de minimiser $\sup\{|Q(t)| \ / \ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ où Q décrit $R_p[X]$ et vérifie $Q(0) = 1$.

1. On considère la suite de fonctions T_p définie par $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$, et, si $p \geqslant 1$, par la relation de récurrence

$$T_{p+1}(t) = 2tT_p(t) - T_{p-1}(t).$$

   (a) Montrer que T_p est une fonction-polynôme de degré p et préciser le coefficient de t^p.

   (b) Prouver, pour tout réel θ et tout entier naturel p que $T_p(\cos(\theta)) = \cos(p\theta)$.
   On rappelle à cet effet la formule de trigonométrie

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

   (c) En déduire $\sup\{|T_p(t)| \ / \ -1 \leqslant t \leqslant 1\}$ et montrer que T_p admet dans $[-1, 1]$ p zéros distincts que l'on précisera.

2. On désigne par a un réel tel que $|a| > 1$.
   On se propose de minimiser $\sup\{|Q(t)| \ / \ -1 \leqslant t \leqslant 1\}$ où Q décrit $\mathbb{R}_p[X]$ et vérifie $Q(a) = 1$.
   Pour cela, on désigne par S_p la fonction $\dfrac{T_p}{T_p(a)}$.

   (a) On considère, s'il en existe, une fonction polynôme P de $\mathbb{R}_p[X]$ telle que $P(a) = 1$ et vérifiant

$$\sup\{|P(t)| \ / \ -1 \leqslant t \leqslant 1\} < \frac{1}{|T_p(a)|}.$$

   Préciser pour $0 \leqslant j \leqslant p$ le signe de $S_p(\cos(\dfrac{j\pi}{p})) - P(\cos(\dfrac{j\pi}{p}))$.
   En déduire que $S_p - P$ a au moins $p + 1$ racines réelles distinctes, et en tirer une contradiction en examinant le degré de $S_p - P$.

   (b) En déduire que $\sup\{|Q(t)| \ / \ -1 \leqslant t \leqslant 1\}$ où Q décrit $\mathbb{R}_p[X]$ et vérifie $Q(a) = 1$ est minimal pour S_p et vaut $\dfrac{1}{|T_p(a)|}$.

   (c) Si P est un polynôme satisfaisant à ce problème de minimisation, montrer que $\frac{1}{2}(P + S_p)$ est aussi un polynôme satisfaisant à ce problème, et qu'on a pour $0 \leqslant j \leqslant p$:

$$\frac{1}{2}\left|P(\cos(\frac{j\pi}{p})) + S_p(\cos(\frac{j\pi}{p}))\right| = \frac{1}{|T_p(a)|}$$

   En déduire que $P = S_p$.

3. Établir que le polynôme suivant est l'unique solution du problème de minimisation posé dans le préambule de cette partie :

$$\frac{T_p(\dfrac{2t - \alpha - \beta}{\beta - \alpha})}{T_p(\dfrac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta})}$$

Partie III : Résolution itérative d'un système $AX = B$

On supposera de plus, dans cette partie, que les valeurs propres de A sont strictement positives et on les classe comme suit :

$$0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

On étudie une méthode itérative de résolution du système de Cramer $AX = B$, qu'on définit à partir d'une suite de réels strictement positifs (α_p) et d'un vecteur X_0 de $\mathbb{R}^n$:

$$X_{p+1} = X_p + \alpha_p(B - AX_p)$$

Justifier l'existence et l'unicité de la solution X^* du système.

1. Dans cette question, on suppose la suite (α_p) constante, égale à $\alpha > 0$.

   (a) Montrer, pour tout nombre entier naturel p, que

   $$X_p - X^* = (I - \alpha A)^p (X_0 - X^*).$$

   (b) Préciser les valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$ de la matrice $I - \alpha A$, ainsi que $\rho(I - \alpha A) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(|\mu_i|)$.
   Tracer la courbe représentative de la fonction définie par $f(\alpha) = \rho(I - \alpha A)$.

   (c) En déduire que (X_p) converge vers X^* si et seulement si $\alpha < \dfrac{2}{\lambda_n}$.
   Montrer que la convergence est optimale en un sens que l'on précisera pour $\alpha = \dfrac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$ et montrer qu'alors :

   $$\|X_p - X^*\| \leqslant \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}\right)^p \|X_0 - X^*\|$$

2. On revient au cas général et on pose pour tout nombre entier naturel $p \geqslant 1$:

   $$P_p(t) = (1 - \alpha_0 t)(1 - \alpha_1 t) \ldots (1 - \alpha_{p-1} t) \quad \text{et} \quad P_p(A) = (I - \alpha_0 A)(I - \alpha_1 A) \ldots (I - \alpha_{p-1} A)$$

   (a) Préciser les valeurs propres $\nu_1, \ldots, \nu_n$ de la matrice $P_p(A)$, et montrer que $\rho(P_p(A)) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(|\nu_i|)$ vérifie l'inégalité

   $$\rho(P_p(A)) \leqslant \sup\{|P_p(t)| \ / \ \lambda_1 \leqslant t \leqslant \lambda_n\}.$$

   (b) Établir que $X_p - X^* = P_p(A)(X_0 - X^*)$, puis que :

   $$\|X_p - X^*\| \leqslant \sup\{|P_p(t)| \ / \ \lambda_1 \leqslant t \leqslant \lambda_n\} \, \|X_0 - X^*\|$$

   (c) Lorsque l'entier p est fixé, comment peut-on choisir les nombres α_j où $0 \leqslant j \leqslant p - 1$ pour minimiser le réel $\sup\{|P_p(t)| \ / \ \lambda_1 \leqslant t \leqslant \lambda_n\}$?
   Etablir qu'on a alors :

   $$\|X_p - X^*\| \leqslant \frac{1}{\left|T_p\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n}\right)\right|} \|X_0 - X^*\|$$

   Montrer que $\left|T_p\left(\dfrac{\lambda_1 + \lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n}\right)\right|$ est équivalent lorsque p tend vers $+\infty$ à $2^{p-1}\left(\dfrac{\lambda_n + \lambda_1}{\lambda_n - \lambda_1}\right)^p$.
   Comparer la convergence de la méthode itérative à α constant de la question **1** avec celle de la méthode itérative optimale développée à cette question.