ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option scientifique

MATHEMATIQUES II

Année 2004

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $E_n = \{1, 2, \ldots, n\} = [\![1, n]\!]$ et Ω l'ensemble des permutations de E_n.

Pour tout ensemble fini A, on note $\operatorname{card}(A)$ son cardinal, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

On note $\binom{n}{k}$, ou C_n^k le nombre $\begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Partie I

Pour tout $\omega \in \Omega$, on appelle *point fixe* de ω, tout élément $k \in E_n$ tel que $\omega(k) = k$.
On appelle *dérangement* toute permutation $\omega \in \Omega$ telle que pour tout $k \in E_n$, $\omega(k) \neq k$. Ainsi un dérangement est une permutation sans point fixe.
On note $D_{n,0} = \{\omega \in \Omega \ / \ \forall i \in E_n,\ \omega(i) \neq i\}$, et pour tout $k \in E_n$

$$D_{n,k} = \{\omega \in \Omega \ / \ \omega \text{ admet exactement } k \text{ points fixes}\}$$

Enfin, on note $d_{n,0} = \operatorname{card}(D_{n,0})$ et pour tout $k \in E_n$, $\quad d_{n,k} = \operatorname{card}(D_{n,k})$.

1. Montrer que
$$D_{n,k} = \bigcup_{\substack{I \subset E_n \\ \operatorname{card}(I)=k}} \{\omega \in \Omega \ / \ \omega|_I = \mathrm{Id} \quad \text{et} \quad \omega|_{E_n \setminus I} \text{ est un dérangement}\}$$

où $\omega|_I$ est la restriction de la permutation ω à I, Id représente la permutation identité, et $\omega|_{E_n \setminus I}$ est la restriction de la permutation ω au complémentaire de I.

2. En déduire que pour tout $k \in E_n$, $\quad d_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k,0}$.

3. (a) Soit $\omega \in \Omega$ un dérangement de E_n. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On définit l'application $\widetilde{\omega_j}$ sur E_{n+1} par

$$\widetilde{\omega_j}(k) = \begin{cases} \omega(k) & \text{si} \quad k \notin \{j, .., n+1\} \\ n+1 & \text{si} \quad k = j \\ \omega(j) & \text{si} \quad k = n+1 \end{cases}$$

Montrer que l'on définit ainsi un dérangement de E_{n+1}.

(b) Soit $\omega \in \Omega$ admettant un unique point fixe $j \in [\![1, n]\!]$.
Montrer que $\widetilde{\omega_j}$ défini ci-dessus est un dérangement de E_{n+1}.

(c) Montrer que les dérangements de E_{n+1} construits dans les questions 3.a) et 3.b) sont distincts, et que tout dérangement de E_{n+1} peut être obtenu de cette façon.

(d) En déduire que

$$d_{n+1,0} = n d_{n,0} + d_{n,1} = n(d_{n,0} + d_{n-1,0}).$$

4. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose

$$u_n = d_{n,0} - n d_{n-1,0}$$

(a) Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n, puis u_n en fonction de n.

(b) En déduire que

$$d_{n,0} = n d_{n-1,0} + (-1)^n.$$

(c) On pose $v_1 = 0$ et pour $n \geqslant 2$, $v_n = \dfrac{d_{n,0}}{n!}$.
Déterminer v_n en fonction de n, puis montrer que

$$d_{n,0} = n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right)$$

Partie II

Afin de lancer un nouveau produit sur le marché, le service marketing d'une entreprise propose au directeur général la campagne suivante

- mettre en vente au prix unitaire de b Euros, n exemplaires du produit,
- chaque exemplaire sera numéroté de façon apparente d'un nombre compris entre 1 et n,
- à l'intérieur de chaque exemplaire du produit, et de façon cachée, se trouve un second numéro,
- l'acheteur qui trouvera à l'intérieur de l'exemplaire un numéro identique à celui figurant à l'extérieur gagnera B Euros.

On suppose que les numéros cachés sont tous différents, compris entre 1 et n et sont choisis au hasard.
Avant de donner son accord, le directeur général souhaite étudier le "coût" d'une telle campagne.
Afin de formaliser la notion de choix au hasard, et pour toute la suite du problème, on munit $(\Omega, P(\Omega))$ de la probabilité uniforme discrète P définie pour tout $A \subseteq \Omega$ par

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Enfin, on note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de gagnants.

1. (a) En utilisant les résultats de la première partie, déterminer la loi de X_n.

   (b) Établir les égalités suivantes

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{1}{k!} = 1$$

   (on justifiera de manière précise l'interversion des deux signes sommes)

2. Calculer l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ de la variable aléatoire X_n (on pourra d'abord calculer $E(X_n(X_n-1))$).

3. (a) Montrer que le coût aléatoire de l'opération pour l'entreprise est donné par

$$C_n = nb - BX_n$$

   En déduire le coût moyen $E(C_n)$, ainsi que le *risque*, donné par l'écart-type $\sigma(C_n)$.

   (b) Quelle sera, d'après vous, la réponse du directeur général ?

4. Montrer que le gain aléatoire d'un acheteur ayant acquis un seul produit est donné par $G_n = BY_n - b$, où Y_n est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$.
   En déduire le gain moyen de l'acheteur.

Partie III

1. Montrer que la suite des variables aléatoires (X_n) converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.

2. Montrer que pour tout $k \in E_n$

$$\left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| = \left| \frac{1}{k!} \sum_{i=n-k+1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right|$$

3. Soit $m \in \mathbb{N}^{\times}$. Montrer que

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{i!} \leqslant \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^k} \leqslant \frac{2}{m!}$$

4. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| \leqslant \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}$$

5. On considère les instructions Pascal suivantes

```
eps := 0.00001;
x:= 2 ; k:=2;
While x > eps/2 do begin
                          x:=x*(2/k) ; k := k+1
                      end;
writeln(k)
```

   (a) On entre dans la boucle `While` avec $x = 2$. On suppose qu'on est passé $j \geqslant 1$ fois dans cette boucle. Quelle est la valeur de x à l'entrée de la boucle la fois suivante ?

   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $u_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ est décroissante et admet une limite que l'on calculera.

   (c) En déduire que la boucle `While` ci-dessus se termine.

   (d) La valeur affichée par la dernière ligne du programme est 11. Que représente-t-elle ?

Partie IV

Si X est une variable aléatoire réelle, on appelle moment factoriel d'ordre $k \geqslant 1$, l'espérance de la variable aléatoire $X(X-1)\dots(X-k+1)$, soit

$$m_k(X) = E(X(X-1)\dots(X-k+1))$$

1. Montrer que si $k \geqslant n+1$, alors $m_k(X_n) = 0$.

2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Montrer que

$$m_k(X_n) = \sum_{j=0}^{n-k} P(X_{n-k} = j) = 1$$

3. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 1.
Déterminer $m_k(Z)$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

4. On définit des polynômes $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ par

$$\begin{array}{l} P_0(X) = 1 \\ P_k(X) = X(X-1)\dots(X-k+1) \quad \text{si } k \geqslant 1 \end{array}$$

   (a) Montrer que la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

   (b) En déduire que X_n et Z ont les mêmes moments d'ordre k, pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

5. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, il existe $(a_{0,k}, a_{1,k}, \dots, a_{k,k})$ réels tels que

$$X^k = \sum_{j=0}^{k} a_{j,k} \frac{P_j(X)}{j!}$$

6. On souhaite désormais calculer les réels $(a_{0,k}, a_{1,k}, \dots, a_{k,k})$.

   (a) Déterminer $\dfrac{P_j(i)}{j!}$, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$ et $i \in \mathbb{N}$.

   (b) Montrer que pour $i \in [\![0, k]\!]$,

$$i^k = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} a_{j,k}.$$

   (c) Écrire la matrice A de ce système d'équations.

   (d) En se plaçant dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à k, écrire l'expression de l'endomorphisme représenté par A^T (transposée de la matrice A) dans la base canonique.

   (e) Montrer que A^T est inversible et déterminer son inverse.

   (f) En déduire que la matrice A est inversible.
   Déterminer A^{-1}, puis l'expression de $a_{j,k}$, pour tout $j \in [\![0, k]\!]$.

   (g) Donner l'expression des moments d'ordre k, $(1 \leqslant k \leqslant n)$, de la variable aléatoire X_n.

Partie V

On suppose dans cette partie qu'un acheteur a acquis ℓ, $(\ell \geqslant 1)$, exemplaires du produit. L'ensemble de ces exemplaires est noté $L = \{j_1, j_2, \dots, j_\ell\}$.
On note Y_n^ℓ la variable aléatoire égale au nombre d'exemplaires gagnants du produit parmi ces ℓ exemplaires achetés.
Enfin, pour tout $i \in E_n$, on pose $A_i = \{\omega \in \Omega \ / \ \omega(i) = i\}$.

1. Pour tout $A \subseteq \Omega$, on note 1_A la variable aléatoire définie par

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Justifier l'égalité

$$Y_n^\ell = 1_{A_{j_1}} + 1_{A_{j_2}} + \cdots + 1_{A_{j_\ell}}$$

   En déduire l'espérance $E(Y_n^\ell)$ de la variable aléatoire Y_n^ℓ.

2. (a) Montrer que

$$(Y_n^\ell)^2 = \sum_{i=1}^{\ell} 1_{A_{j_i}} + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant \ell} 1_{A_{j_i} \cap A_{j_k}}$$

   (b) En déduire la variance de la variable aléatoire Y_n^ℓ.

3. (a) Montrer que le gain de l'acheteur est égal à $G_n = BY_n^\ell - b\ell$.
   (b) Déterminer son gain moyen, ainsi que l'écart type de ce gain.
   (c) Du point de vue de l'acheteur, est-il intéressant d'acquérir plusieurs exemplaires du produit ?