ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Année 2005

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations

Dans tout ce problème, on considère n un entier naturel non nul.
Pour toute matrice M, on note ${}^tM$ sa transposée.
On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique, à l'ensemble des matrices colonnes à n lignes ; ainsi pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note x_i sa i-ième coordonnée et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique : $< x, y >= {}^txy$ et la norme euclidienne de x est définie par : $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ On désigne par U une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.

A f fonction continue de U dans $\mathbb{R}$, et y vecteur de $\mathbb{R}^n$, on associe la fonction F_y définie sur U par : $x \mapsto < x, y > -f(x)$ et on note $U(f)$ l'ensemble, éventuellement vide, des vecteurs y de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels F_y admet un maximum.

Lorsque $U(f)$ est non vide, on appelle fonction conjuguée de f la fonction notée $f^\star$ définie sur $U(f)$ par : $f^\star(y) = \max\{F_y(x) \quad / \quad x \in U\}$.

Partie I

Dans cette partie, $n = 1$ et U est un intervalle de $\mathbb{R}$; ainsi le produit scalaire se confond avec le produit naturel sur $\mathbb{R}$ et la fonction F_y est définie sur l'intervalle U par $F_y(x) = xy - f(x)$.

1. Lorsque U est un segment de $\mathbb{R}$, montrer que $f^\star$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Quelques exemples.
Après avoir étudié les variations de F_y, préciser $U(f)$ et $f^\star$ dans les cas suivants :

   (a) $U = \mathbb{R}, \quad f(x) = a\dfrac{x^2}{2}$ où a est un réel fixé strictement positif.

   (b) $U = \mathbb{R}_+^\times, \quad f(x) = \dfrac{x^\alpha}{\alpha}$ où α est un réel fixé strictement supérieur à 1.
   (on pourra introduire le réel β vérifiant : $\quad \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$.

   (c) $U = \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x$.

3. Pour chacun des cas précédents, déterminer $(f^\star)^\star$ ainsi que son ensemble de définition. Quel constat pouvez-vous faire ?

4. Plus généralement, on suppose que : $U = \mathbb{R}$ et f est une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction dérivée est $\mathbb{R}$ tout entier et vérifiant pour tout x réel $f''(x) > 0$.

   (a) Etablir que f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   On note g l'application réciproque de f'.

   (b) Après avoir dressé le tableau des variations de l'application F_y associée à f et y, montrer que $U(f) = \mathbb{R}$ et que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^\star(x) = xg(x) - f(g(x))$.
   Justifier la dérivabilité de $f^\star$ et exprimer $(f^\star)'$ en fonction de g.

   (c) Après avoir étudié pour y réel les variations de l'application : $x \mapsto xy - f^\star(x)$, en déduire que : $(f^\star)^\star = f$.

Partie II

On revient aux notations du préambule.

1. On suppose dans cette question que : $\quad U = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \|x\|$.

   (a) Pour t réel strictement positif et $y \in \mathbb{R}^n$, calculer $F_y(ty)$ et préciser $\lim\limits_{t \to +\infty} F_y(ty)$.
   Quelle comparaison pouvez-vous faire entre les ensembles $U(f)$ et $\{y \in \mathbb{R}^n \quad / \quad \|y\| \leqslant 1\}$?

   (b) Lorsque $\|y\| \leqslant 1$, montrer que : $F_y(x) \leqslant F_y(0)$. En déduire $U(f)$ et $f^\star$.

   (c) Préciser $(f^\star)^\star$.

   Dans toute la suite du problème, A désigne une matrice symétrique réelle d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.
   On rappelle que : $\forall x, x' \in \mathbb{R}^n, \quad < x, Ax' > = < x', Ax >$.

2. On suppose dans cette question que : $U = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \dfrac{< x, Ax >}{2}$.
Pour $y \in \mathbb{R}^n$, on définit ainsi F_y sur $\mathbb{R}^n$ par $F_y(x) = < x, y > - \dfrac{< x, Ax >}{2}$.

   (a) En utilisant un changement de base orthonormale, établir l'encadrement :

   $$\lambda \|x\| x^2 \leqslant < x, Ax > \leqslant \mu \|x\|^2$$

   lorsque λ, (respectivement μ) désigne la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de A.

   (b) Pour x et h deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, exprimer $F_y(x+h) - F_y(x)$ en fonction de $< h, Ah >$ et $< h, y > -Ax$ et établir que : $F_y(x+h) - F_y(x) \leqslant < h, y > -Ax$.

(c) Montrer que, pour tout vecteur y de $\mathbb{R}^n$, F_y admet un maximum obtenu pour : $x = A^{-1}y$ et préciser $U(f)$, $f^\star$ et $(f^\star)^\star$.

3. On reprend la même fonction qu'au 2), c'est-à-dire $f(x) = \dfrac{< x, Ax >}{2}$ mais dans cette question, on suppose que U est une partie convexe, fermée non vide de $\mathbb{R}^n$.
On prolonge, de façon naturelle et pour tout y de $\mathbb{R}^n$, F_y à $\mathbb{R}^n$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad F_y(x) = < x, y > - \frac{< x, Ax >}{2}$$

(a) Existence d'un maximum.

- Montrer que : $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\lim_{\|x\| \to +\infty} F_y(x) = -\infty$ en déduire que pour $x_0 \in U$:
il existe r strictement positif vérifiant $(\|x\| > r \Longrightarrow F_y(x) < F_y(x_0))$.
- Établir que l'ensemble $U_0 = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n \quad / \quad \|x\| \leqslant r\}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ et en déduire que : $U(f) = \mathbb{R}^n$.

(b) Unicité d'un élément réalisant le maximum.

- Pour x et x' deux vecteurs de U et $y \in \mathbb{R}^n$, établir la relation :

$$F_y\left(\frac{x + x'}{2}\right) - \frac{F_y(x)}{2} - \frac{F_y(x')}{2} = \frac{< x - x', X(x - x') >}{8}$$

- En supposant que $\overline{x}$ et $\overline{x}'$ sont deux vecteurs distincts réalisant le maximum de F_y, montrer que : $f^\star(y) < F_y\left(\dfrac{1}{2}(\overline{x} + \overline{x}')\right)$ puis établir une contradiction.

Partie III

Dans toute cette partie, c désigne un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et B une matrice carrée non nulle à n lignes et n colonnes.
On reprend la même fonction et les mêmes conventions qu'en II.3) et on choisit pour U l'ensemble des vecteurs x de $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $Bx = c$.
On note $\operatorname{Im} M$ et $\ker M$ l'image et le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée M d'ordre n.
On suppose que $c \in \operatorname{Im} B$; ainsi U est une partie convexe fermée non vide de $\mathbb{R}^n$ (on ne demande pas de le vérifier).
D'après les résultats obtenus dans la partie II, on sait que pour tout y de $\mathbb{R}^n$, F_y admet un unique vecteur $\overline{x}$ appartenant à U et réalisant le maximum de F_y.
L'objectif de cette partie est de donner une caractérisation de $\overline{x}$ et d'établir un algorithme de recherche.

1. Caractérisation de $\overline{x}$.

(a) Vérifier que pour tout x, x' de $\mathbb{R}^n$, $< x, Bx' > = < {}^tBx, x' >$.
Montrer que : $\operatorname{Im}({}^tB) \subset (\ker B)^\perp$ en désignant par $(\ker B)^\perp$ l'orthogonal de la partie $\ker B$.
Justifier l'égalité des dimensions de $\operatorname{Im}({}^tB)$ et de $(\ker B)^\perp$ et en déduire que :

$$\operatorname{Im}({}^tB) = (\ker B)^\perp$$

(On admettra que : $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}({}^tB)$).

(b) Lorsque h est un vecteur de $\ker B$ et t un réel, établir la relation :

$$F_y(\overline{x} + th) - F_y(\overline{x}) = t < y - A\overline{x}, h > -t^2 \frac{< h, Ah >}{2}$$

En déduire que $\overline{x}$ est caractérisé par l'existence de $\overline{z} \in \mathbb{R}^n$ et vérifiant les deux conditions : $B\overline{x} = c$ et $y - A\overline{x} = {}^tB\overline{z}$.

2. Un algorithme de recherche de $\overline{x}$.
On désigne par r un réel strictement positif et z_0 un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et on définit les suites $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad Ax_p - y + {}^tBz_p = 0 \quad \text{et} \quad z_{p+1} = z_p + r(Bx_p - c)$$

(a) Montrer que les deux suites sont bien définies et qu'elles vérifient les deux relations :

$$A(x_p - \overline{x}) = {}^tB(\overline{z} - z_p) \quad \text{et} \quad z_{p+1} - \overline{z} = z_p - \overline{z} + rB(x_p - \overline{x})$$

(b) Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \|z_{p+1} - \overline{z}\|^2 = \|z_p - \overline{z}\|^2 - 2r < x_p - \overline{x}, A(x_p - \overline{x}) > +r^2 \|B(x_p - \overline{x})\|^2$$

(c) Démontrer l'existence d'une matrice carrée d'ordre n symétrique à valeurs propres strictement positives notée $A^{1/2}$ et vérifiant $(A^{1/2})^2 = A$.
On note $A^{-1/2}$ la matrice inverse de $A^{1/2}$.

- Montrer la relation : $\left\|BA^{-1/2}x\right\|^2 = < xA^{-1/2}\,{}^tBBA^{-1/2}x >$ pour tout x de $\mathbb{R}^n$.
- Établir que la matrice $A^{-1/2}\,{}^tBBA^{-1/2}$ est symétrique et que sa plus grande valeur propre α est strictement positive.
- En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a $\|Bx\| \leqslant \alpha < x, Ax >$.

(d) On choisit $r \in \left]0, \dfrac{2}{\alpha}\right[$.
Montrer que : $\|z_{p+1} - \overline{z}\|^2 - \|z_p - \overline{z}\|^2 \leqslant r(r\alpha - 2) < x_p - \overline{x}, A(x_p - \overline{x}) > \leqslant 0$. En déduire que la suite $(\|z_p - \overline{z}\|)_{p\in\mathbb{N}}$ est monotone convergente, puis que x_p converge vers $\overline{x}$.