ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Année 2006

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout ce problème, la lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on note $[\![1,n]\!]$ l'ensemble $\{1,2,...,n\}$. On rappelle qu'une permutation de $[\![1,n]\!]$ est une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur lui-même. Par ailleurs, on note

- $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$;
- $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;
- $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à p lignes, q colonnes à coefficients réels ;
- $m_{i,j}$ l'élément générique d'une matrice M, c'est-à-dire le réel situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de M ;
- ${}^tM$ la transposée d'une matrice M.

Lorsque σ appartient à $\mathfrak{S}_n$, on appelle matrice de la permutation σ la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ notée P_σ dont le terme générique $p_{i,j}$ vérifie : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ p_{i,j} = 1$ si $\sigma(i) = j$ et $p_{i,j} = 0$ sinon.

Par exemple, pour $n = 3$ et $\sigma \in G_3$ définie par $\sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 3,\ \sigma(3) = 1,\ P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On s'intéresse dans un premier temps à l'ensemble E_n des matrices M appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété suivante : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,j}$.
Dans ce cas, leur valeur commune sera notée $\omega(M)$.

Partie I : Etude de l'ensemble E_n.

On note J la matrice d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 c'est-à-dire égale à $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ et U la matrice colonne à n lignes égale à $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Généralités.

   (a) Montrer que E_n est un sous espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et que l'application $\omega\ : E_n \to \mathbb{R} \quad M \mapsto \omega(M)$ en est une forme linéaire.

   (b) Lorsque $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, établir que : $M \in E_n$ si et seulement si U est vecteur propre commun à M et ${}^tM$ associé à une même valeur propre.

   (c) Vérifier que E_n est stable pour le produit matriciel et préciser $\omega(MN)$ en fonction de $\omega(M)$ et $\omega(N)$ lorsque M et N appartiennent à E_n.

2. Dimension de E_n.

   (a) Montrer que le noyau de ω et la droite vectorielle engendrée par J sont supplémentaires dans E_n.

   (b) Pour $(r, s) \in [\![2, n]\!]^2$, on note $A_{r,s}$ la matrice de E_n dont tous les éléments sont nuls sauf les quatre éléments : $a_{1,1},\ a_{r,s},\ a_{1,s},\ a_{r,1}$ qui sont tels que : $a_{1,1} = a_{r,s} = 1$ et $a_{1,s} = a_{r,1} = -1$.
   Montrer que la famille $(A_{r,s})_{(r,s)\in[\![2,n]\!]^2}$ est libre puis qu'elle est génératrice du noyau de ω. En déduire la dimension de E_n.

3. Une famille génératrice de E_n.

   (a) Etablir que pour toute permutation σ de $[\![1, n]\!]$, la matrice P_σ appartient à E_n et que les matrices P_σ sont les seules matrices M de E_n telles que $\omega(M) = 1$ n'admettant qu'un seul élément non nul par ligne et par colonne.

   (b) crire la matrice P_σ correspondant à la permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ définie par :
   $$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad \sigma(k) = k + 1 \quad \text{et} \quad \sigma(n) = 1$$
   Préciser les matrices : $(P_\sigma)^2,\ (P_\sigma)^3, \ldots,\ (P_\sigma)^n$.

   (c) Exprimer J comme combinaison linéaire de matrices de permutations. Faire de même avec chaque matrice du type $A_{r,s}$ quand $(r, s) \in [\![2, n]\!]^2$: on pourra se limiter aux matrices $A_{2,2}$ et $A_{3,2}$ (si $n \geqslant 3$) et donner une décomposition explicite de ces deux matrices en combinaison linéaire de matrices de permutations.

   (d) Prouver qu'il existe $(n-1)^2+1$ permutations $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{(n-1)^2+1}$ de $[\![1, n]\!]$ telles que $(P_{\sigma_1},\ P_{\sigma_2}, \ldots, P_{\sigma_{(n-1)^2+1}})$ soit une base de E_n.
   Que représente la somme des composantes d'une matrice M de E_n relativement à cette base ?

Les deux parties suivantes du problème sont indépendantes de la partie I

On s'intéresse dans toute la suite du problème à l'ensemble des matrices M de E_n dont tous les éléments $m_{i,j}$ sont positifs ou nuls. On note E_n^+ cet ensemble.

Partie II : Etude de l'ensemble E_n^+

1. Montrer que E_n^+ est stable pour le produit matriciel et que pour toute famille $(\sigma_1,\ \sigma_2, ..., \sigma_p)$ de permutations de $[\![1,n]\!]$ et toute famille $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p)$ de réels positifs ou nuls, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k P_{\sigma_k} \in E_n^+$.

   Dans cette partie, on admettra que :

$$\forall M \in E_n \backslash \{0\}, \quad \exists \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad \text{tel que} \quad m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \cdots m_{n,\sigma(n)} > 0$$

2. (a) On suppose que σ est une telle permutation associée à $M \in E_n^+ \backslash \{0\}$ et on désigne par

$$c = \min\{m_{1,\sigma(1)}, m_{2,\sigma(2)}, ..., m_{n,\sigma(n)}\}.$$

   Montrer que : $M - cP_\sigma \in E_n^+$.

   (b) En déduire que pour toute matrice M de $E_n^+ \backslash \{0\}$, il existe $p \in \mathbb{N}^\times$, p permutations $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ de $[\![1,n]\!]$ et p réels $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ strictement positifs tels que : $M = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k P_{\sigma_k}$.

   (c) Montrer qu'une matrice de E_n^+ possédant au moins $n^2 - n + 1$ termes nuls est nulle ; en déduire que : $1 \leqslant p \leqslant n^2 - n + 1$.

   (d) Exemple : lorsque $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, exprimer M comme combinaison linéaire à scalaires strictement positifs de matrices de permutations de $[\![1,3]\!]$

3. Une application : L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique et on note $< x, y >$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $(u_1, u_2, ..., u_n)$ et $(v_1, v_2, ..., v_n)$ deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$.

   (a) Vérifier que la matrice $M_{u,v} = (< v_i, u_j >)$ appartient à E_n^+ et donner la valeur de $\omega(M_{u,v})$.
   Lorsque σ est une permutation de $[\![1,n]\!]$, préciser $M_{u,v}$ dans le cas où $(v_1, v_2, ..., v_n) = (u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, ..., u_{\sigma(n)})$.

   (b) On introduit l'endomorphisme symétrique s de $\mathbb{R}^n$ dont $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est une base orthonormale de diagonalisation et de valeurs propres respectivement associées $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

   On note Λ la matrice colonne $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

   Montrer l'égalité matricielle : $\begin{pmatrix} < s(v_1), v_1 > \\ \vdots \\ < s(v_n), v_n > \end{pmatrix} = M_{u,v}\Lambda.$

   (c) En utilisant la question **II.2.b**, établir que pour toute forme linéaire f de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe deux permutations σ et σ' de $[\![1,n]\!]$ vérifiant : $f(P_\sigma \Lambda) \leqslant f(M_{u,v}\Lambda) \leqslant f(P_{\sigma'}\Lambda)$.

   (d) On suppose que : $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ et $r \in [\![1,n]\!]$.
   Trouver une forme linéaire f permettant d'en déduire les inégalités :

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \leqslant \sum_{k=1}^{r} < s(v_k), v_k > \leqslant \sum_{k=1}^{r} \lambda_{n-r+k}$$

   Que représente le terme $< s(v_k), v_k >$ dans la matrice de s relativement à la base $(v_1, v_2, ..., v_n)$ et pouvez- vous donner une interprétation matricielle des inégalités obtenues ci-dessus ?

Partie III

L'objet de cette dernière partie est la justification du résultat admis dans la partie **II.1**.
Lorsque $(p, q) \in [\![1, n]\!]^2$, on appelle sous-matrice de type (p, q) de la matrice M appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ toute matrice extraite de M en supprimant de M $n-p$ lignes et $n-q$ colonnes.

1. Lorsque σ est une permutation de $[\![1, n]\!]$ et M un élément de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, expliciter le terme générique des matrices $P_\sigma M$ et $MP_{\sigma^{-1}}$. Comment obtient-on ces deux matrices à partir de M ?

2. On suppose que M appartient à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'elle contient une sous-matrice nulle de type (p, q).

   (a) Montrer que : $\exists \sigma, \sigma'$ deux permutations de $[\![1, n]\!]$ telles que $P_\sigma M P_{\sigma'} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Z & Y \end{pmatrix}$ avec $X \in \mathfrak{M}_{p,n-q}(\mathbb{R})$, $Z \in \mathfrak{M}_{n-p,n-q}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathfrak{M}_{n-p,q}(\mathbb{R})$.

   (b) En déduire que si M appartient à $E_n^+ \backslash \{0\}$, on a $p + q \leqslant n$.

3. On désire établir la propriété $(\mathcal{P}_n)$ suivante : si M appartient à $M_n(\mathbb{R})$ et vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H}_n)$: $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \dots m_{n,\sigma(n)} = 0$, alors M contient au moins une sous-matrice nulle de type (p, q) avec $p + q = n + 1$.

   (a) Le vérifier pour $n = 2$.

   (b) n étant supérieur ou égal à 3, on suppose que la propriété $(\mathcal{P}_k)$ est vérifiée pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$.
   On désigne par M une matrice appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant $(\mathcal{H}_n)$.

   - Etablir que M contient une sous-matrice de type $(n-1, n-1)$ vérifiant $(\mathcal{H}_{n-1})$.
   - En déduire que : $\exists \tau, \tau' \in \mathfrak{S}_n, \quad \exists p, q / p + q = n$ tels que $P_\tau M P_{\tau'} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Z & Y \end{pmatrix}$ avec $X \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$, $Z \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathfrak{M}_q(\mathbb{R})$.
   - Montrer que X vérifie $(\mathcal{H}_p)$ ou Y vérifie $(\mathcal{H}_q)$.
   - En déduire alors que M contient une sous-matrice nulle de type (p', q') telle que $p' + q' = n + 1$ et conclure.

4. Montrer alors, à l'aide de 2) b) que :

$$\forall M \in E_n^+ \backslash \{0\}, \quad \exists \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad \text{tel que} \quad m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \dots m_{n,\sigma(n)} > 0$$