CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Année 1983

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par f_n, g_n et h_n les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x+x^2)^n}, \qquad g_n(x) = \frac{x}{(1+x+x^2)^n}, \qquad h_n(x) = \frac{x^2}{(1+x+x^2)^n}$$

PARTIE I

1. Etudier la variation des fonctions f_1, g_1 et h_1. Dresser les tableaux de variation de ces fonctions. Construire leurs courbes représentatives dans un même repère orthonormal.

2. Déterminer les nombres de points d'inflexion de ces courbes (ce qui revient à déterminer les nombres de points où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe). Calculer les coordonnées des points d'inflexion et les pentes des tangentes en ces points a 10^{-2} près.

PARTIE II

On pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)dt, \qquad J_n = \int_0^1 g_n(t)dt, \qquad K_n = \int_0^1 h_n(t)dt$$

1. Montrer que, pour tout élément x de $[0,1]$,

$$1 - x \leqslant \frac{1}{1+x+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x}$$

2. En déduire que, pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$

   Trouver un équivalent simple de I_n. (On dit que les suites (u_n) et (v_n) de nombres réels strictement positifs sont équivalentes lorsque le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 1 si n tend vers $+\infty$).

3. Pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 3$, calculer les intégrales

$$\int_0^1 t(1-t)^n dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^n} dt$$

   Trouver un équivalent simple de J_n.

4. Pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 4$, calculer les intégrales

$$\int_0^1 t^2(1-t)^n dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \frac{t^2}{(1-t)^n} dt$$

   Trouver un équivalent simple de K_n.

PARTIE III

On conserve les notations précédentes.

1. Calculer I_1.

2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n,

$$I_{n+1} = \frac{2(2n-1)}{3n} I_n + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3}\right)$$

   Calculer I_2, I_3, et I_4. On donnera le résultat sous la forme $a + b\pi\sqrt{3}$, où a et b sont des nombres rationnels que l'on exprimera sous forme réduite ; on donnera ensuite des valeurs approchées de ces intégrales à 10^{-3} près.

3. Exprimer J_n et K_n en fonction de I_n. En déduire les valeurs de J_n et de K_n lorsque $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$. On donnera ces valeurs approchées à 10^{-3} près.

PARTIE IV

On considère les intégrales impropres

$$I'_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt, \qquad J'_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)dt, \qquad K'_n = \int_0^{+\infty} h_n(t)dt$$

1. Déterminer pour quelles valeurs de n ces intégrales sont convergentes.

2. Dans chacun des cas où elles convergent, calculer I'_n, J'_n et K'_n lorsque $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.