CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Année 1989

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'objet du problème est l'étude d'une promenade aléatoire (**partie III**). Dans les **parties I** et **II** on établit des résultats liminaires qui seront utilisés dans la **partie III**.

PARTIE I

Soient y_1, y_2, y_3, y_4 des nombres réels. On considère le système d'équations:

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur y_1, y_2, y_3, y_4 pour que ce système admette au moins une solution.

2. On suppose que cette condition est satisfaite. Soit a un nombre réel. Exprimer en fonction de y_2, y_3, y_4 l'unique solution (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant la relation:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a.$$

Partie II

On considère une suite (p_n) satisfaisant à la relation de récurrence

$$p_{n+4} = \frac{1}{4}\left(p_{n+3} + p_{n+2} + p_{n+1} + p_n\right). \tag{1}$$

1. Dans cette question, on étudie les suites géométriques vérifiant (1).

   (a) Montrer que la suite géométrique de terme général $p_n = r^n$ (où $r \in^*$) vérifie la relation (1) si et seulement si r est racine du polynôme:
   $$P(x) = 4x^4 - x^3 - x^2 - x - 1.$$

   (b) Montrer que $P(x)$ est divisible par $x - 1$ et préciser le quotient de $P(x)$ par $x - 1$.

   (c) Étudier la variation de la fonction Q définie sur

   (d) Déterminer les réels r tels que les suites géométriques de terme général $p_n = r^n$ vérifient la relation (1). Étudier la convergence de ces suites.

2. Dans cette question, on étudie numériquement la suite (p_n) vérifiant la relation de récurrence (1) et les conditions initiales:
   $$p_0 = 1; \quad p_1 = \frac{1}{4}; \quad p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}; \quad p_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64}.$$

   (a) Rédiger un algorithme (en français) permettant de calculer, pour tout nombre entier naturel N, les termes $p_0, p_1, \ldots, p_N$ de la suite (p_n).

   (b) Utiliser cet algorithme pour donner des valeurs décimales approchées (à la précision de la calculatrice employée) de $p_0, p_1, \ldots, p_{10}$.
   Que peut-on conjecturer à propos de la convergence et de la limite de la suite (p_n) ?
   Dans le reste de cette partie, (p_n) est à nouveau une suite quelconque vérifiant (1);
   on lui associe les deux suites (m_n) et (M_n) définies par :
   $$m_n = \min\left(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}\right); \qquad M_n = \max\left(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}\right).$$
   (m_n et M_n sont donc le plus petit et le plus grand des nombres réels $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}$.)

3. Dans cette question, on établit la convergence des suites (m_n) et (M_n).

   (a) Montrer que m_n est inférieur ou égal aux nombres $p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}, p_{n+4}$.
   En déduire que la suite (m_n) est croissante. Établir de même que la suite (M_n) est décroissante.

   (b) Prouver que, pour tout nombre entier naturel n:
   $$m_0 \leqslant m_n \leqslant p_n \leqslant M_n \leqslant M_0.$$

   (c) Prouver que les suites (m_n) et (M_n) sont convergentes et que leurs limites respectives, notées m et M, vérifient:
   $$m \leqslant M.$$

4. Dans cette question, on établit la convergence de la suite (p_n).

   (a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n:
   $$p_{n+4} \leqslant \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m_n.$$
   $$p_{n+4} \leqslant \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m.$$
   En appliquant la dernière inégalité à $p_{n+5}, p_{n+6}, p_{n+7}$, montrer que:
   $$M_{n+4} \leqslant \frac{3}{4}M_n + \frac{1}{4}m.$$

   (b) En déduire que $M \leqslant m$, puis que $M = m$.

   (c) Établir la convergence de la suite (p_n).

PARTIE III

Dans la suite du problème, on étudie la promenade aléatoire d'un jeton sur les quatre cases C_1, C_2, C_3, C_4 suivantes:

C_1	C_2	C_3	C_4

Au cours des instants successifs $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$, on y déplace un jeton de la manière suivante :

a. À l'instant 0, le jeton est placé sur C_1.

b. Si, à l'instant n, le jeton est placé sur C_1, on le place à l'instant $n+1$ sur l'une des cases C_1, C_2, C_3, C_4, le choix d'une de ces cases s'effectuant de manière équiprobable (et indépendamment des positions du jeton aux instants antérieurs).

c. Si, à l'instant n, le jeton est placé sur C_i, où $2 \leqslant i \leqslant 4$, on le place à l'instant $n+1$ sur la case C_{i-1}.
Pour tout nombre entier naturel n et pour i égal à $1, 2, 3$ ou 4, on note désormais: $Z(n, i)$ la variable aléatoire prenant pour valeur 1 si le jeton est sur la case C_i à l'instant n, et 0 dans le cas contraire;
$q(n, i)$ la probabilité pour que le jeton soit sur la case C_i à l'instant n.
On pose :

$$Q_n = \begin{pmatrix} q(n,1) \\ q(n,2) \\ q(n,3) \\ q(n,4) \end{pmatrix}$$

1. Dans cette question, on étudie les suites $(q(n, i))$, où i est égal à $1, 2, 3$ ou 4.

   (a) Expliciter la matrice A d'ordre 4 telle que, pour tout nombre entier naturel n:

   $$Q_{n+1} = AQ_n.$$

   (b) En déduire les relations suivantes:

   $$\left\{ \begin{array}{lcl} q(n+1,4) & = & \frac{1}{4} q(n,1) \\ q(n+2,3) & = & \frac{1}{4} [q(n,1) + q(n+1,1)] \\ q(n+3,2) & = & \frac{1}{4} [q(n,1) + q(n+1,1) + q(n+2,1)] \\ q(n+4,1) & = & \frac{1}{4} [q(n,1) + q(n+1,1) + q(n+2,1) + q(n+3,1)] \end{array} \right.$$

   (c) Calculer $q(0,1)$, $q(1,1)$, $q(2,1)$, $q(3,1)$. Comparer la suite $(q(n,1))$ à la suite définie dans la question II.2. En déduire que les quatre suites $(q(n,i))$, où i est égal à $1, 2, 3$ ou 4, sont convergentes; exprimer leurs limites en fonction de la limite L de la suite $(q(n,1))$.

   (d) Calculer $q(n,1) + q(n,2) + q(n,3) + q(n,4)$. En déduire les limites des quatre suites $(q(n,i))$ pour i égal à $1, 2, 3$ ou 4.

2. Pour tout nombre entier naturel n et pour i égal à $1, 2, 3$ ou 4, on pose:

   $$Y(n, i) = Z(0, i) + Z(1, i) + \ldots + Z(n, i).$$

   $Y(n, i)$ est donc la variable aléatoire indiquant le nombre de passages du jeton sur la case C_i, au cours des instants $0, 1, 2, \ldots, n$. On détermine dans cette question le nombre moyen des passages du jeton sur l'une des cases au cours de ces instants, autrement dit les espérances des variables aléatoires $Y(n, i)$.

   (a) Déterminer la somme $Y(n,1) + Y(n,2) + Y(n,3) + Y(n,4)$.

(b) Pour tout nombre entier naturel n, on pose:

$$E_n = \begin{pmatrix} E[Y(n,1)] \\ E[Y(n,2)] \\ E[Y(n,3)] \\ E[Y(n,4)] \end{pmatrix}$$

Exprimer l'espérance $E[Z(n,i)]$ en fonction de $q(n,i)$. En déduire que:

$$E_n = Q_0 + Q_1 + \ldots + Q_n.$$

(c) Déduire des résultats précédents que:

$$(A - I_4)E_n = Q_{n+1} - Q_0,$$

où I_4 est la matrice identité d'ordre 4, et que:

$$E[Y(n,1)] + E[Y(n,2)] + E[Y(n,3)] + E[Y(n,4)] = n + 1.$$

Déduire des résultats de la partie I l'expression de $E[Y(n,i)]$, où i est égal à $1, 2, 3$ ou 4, en fonction de $q(n+1,j)$, où j est égal à $2, 3$ ou 4.

(d) Pour i égal à $1, 2, 3$ ou 4, expliciter des nombres réels f_i et g_i tels que :

$$E[Y(n,i)] = f_i.n + g_i + \epsilon_i(n) \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \epsilon_i(n) = 0.$$