CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1993

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE I

On note E l'espace vectoriel des fonctions numériques définies et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Soit F l'ensemble des éléments f de E tels que :

$$f'' - 3f' + 2f = 0$$

Soit F_0 l'ensemble des éléments de F vérifiant en outre la relation $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que F et F_0 sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Soit f_1 et f_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$f_1(x) = e^x \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = e^{2x}$$

   Montrer que f_1 et f_2 sont des éléments de F linéairement indépendants.
3. Soit f un élément de F.
   (a) Montrer qu'il existe un couple (a_1, a_2) et un seul de nombres réels tel que $f - a_1f_1 - a_2f_2$ appartienne à F_0.
   (b) Soit g_1 et g_1 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$g_1(x) = e^{-x}(f'(x) - 2f(x)) \qquad \text{et} \qquad g_2(x) = e^{-2x}(f'(x) - f(x)).$$

   Montrer que ces fonctions sont constantes.

(c) En appliquant le résultat précédent, montrer que si f appartient à F_0, alors $f = 0$.

4. Soit Φ l'application de F dans $\mathbb{R}^2$ définie par la relation :

$$\Phi(f) = (f(0), f'(0)).$$

Montrer que Φ est un isomorphisme de l'espace vectoriel F sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$ et la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
L'objet de l'exercice est l'étude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels déterminée par la condition initiale $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence, valables pour tout nombre entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{2n+1} &= f(u_{2n}) \\ u_{2n+2} &= g(u_{2n+1}) \end{cases}$$

1. Justifier l'existence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et montrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_{2n+1} > 1$ et $u_{2n+2} > 0$.
2. Montrer que les équations $f(x) = x$ et $g(x) = x$ ont une solution commune et une seule. On note α cette solution.
3. Montrer que la fonction $\varphi = f \circ g$ est définie et décroissante sur $]1, +\infty[$.
Montrer que la fonction $\psi = \varphi \circ \varphi$ est définie et croissante sur $]1, +\infty[$.Calculer $\psi(\alpha)$.
4. Montrer que, pour tout élément x de $]1, \alpha[$:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}}{\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}-1}} > x$$

5. Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = u_{4n+1}$.
   (a) Montrer que $v_0 < \alpha$.
   (b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = \psi(v_n)$.
   (c) A l'aide du résultat de la question 4, montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et que, pour tout nombre entier naturel n,
   $$1 < v_n \leqslant \alpha.$$
   (d) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et trouver sa limite.
6. On considère les trois suites $(u_{4n+2})_{n\geqslant 0}$, $(u_{4n+3})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{4n+4})_{n\geqslant 0}$. Montrer que ces suites s'expriment simplement à l'aide de la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$. En déduire qu'elles sont convergentes et trouver leurs limites.
7. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et trouver sa limite.

EXERCICE 3

L'objet de cet exercice est l'étude d'un exemple de discrétisation d'une variable aléatoire.
Pour tout nombre réel x, on note $[x]$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand des nombres entiers inférieurs ou égaux à x. On note $\{x\}$ la partie décimale de x, définie par :

$$\{x\} = x - [x]$$

A.

1. Représenter graphiquement les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto [x], \quad x \mapsto \{x\}, \quad x \mapsto [2x] \quad \text{et} \quad x \mapsto \{2x\}$$

2. Montrer que, pour tout nombre réel x :$[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$

B.

Soit X une variable aléatoire positive admettant pour densité une fonction f continue sur $[0, +\infty[$. On note F la fonction de répartition de X

1. Pour tout nombre entier naturel non nul n, exprimer à l'aide de f la densité de la variable aléatoire nX.

2. Pour tout nombre entier naturel k, exprimer à l'aide de f ou de F la probabilité que $[X] = k$ (c'est-à-dire que la partie entière de X soit égale à k).

3. Pour tout nombre entier naturel non nul n, exprimer à l'aide de f ou de F la loi de la variable aléatoire à valeurs entières $[nX]$.

C.

Soit λ un nombre réel strictement positif. On suppose maintenant que la fonction f est définie par les relations :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition et l'espérance de X.

2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $[X]$. De quelle loi s'agit-il ? Calculer l'espérance de $[X]$.

3. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on considère la variable aléatoire réelle discrète $Y_n = \dfrac{1}{n}[nX]$
   Trouver l'espérance m_n de Y_n. Montrer que la suite $(m_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente et trouver sa limite.

4. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle $\{X\}$. En déduire la densité de $[X]$ et calculer son espérance.