CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE ET TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES II

Année 1995

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Ce problème est consacré à l'étude de la loi de Pareto (ViIfredo Pareto 1848-1923).
La première partie étudie les propriétés de cette loi. On montre ensuite, sur un exemple, comment elle permet de modéliser de façon très satisfaisante des phénomènes rencontrés en démographie. Les revenus d'une population sont aussi très bien modélisés par une loi de Pareto, et on compare deux modes de calcul d'impôts sur des revenus suivant une loi de Pareto. La seconde partie est l'étude de l'indice d'inégalité de Gini dans le cas d'une loi de Pareto.
Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont à valeurs réelles.

PARTIE I. La loi de Pareto.

Dans tout le problème α et x_0 désignent deux nombres réels strictement positifs.
On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi de Pareto de paramètres α et x_0 si X, à valeurs dans $[x_0, +\infty[$, admet pour densité la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \forall x < x_0 \\ f(x) = \alpha \dfrac{x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \forall x \geqslant x_0 \end{cases}$$

On écrit alors que X suit $VP(\alpha, x_0)$.

A. Quelques résultats probabilistes.

1. Soit X une variable aléatoire suivant $VP(\alpha, x_0)$.

   (a) Vérifier que f est bien une fonction de densité.

   (b) Déterminer la fonction de répartition F de X et calculer, pour $x \geqslant x_0$, $\ln(1 - F(X))$ en fonction de $\ln(x)$.
   On rappelle que ln désigne la fonction logarithme népérien.

2. Soit X une variable aléatoire suivant $VP(\alpha, x_0)$.

   (a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles X admet une espérance et la calculer dans ce cas.

   (b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles X admet une variance et la calculer dans ce cas.

3. Soient une variable aléatoire X suivant $VP(\alpha, x_0)$ et un réel strictement positif λ. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = \lambda X$. Quelle loi reconnait-on ?

4. Soit une variable aléatoire W qui suit une loi exponentielle de paramètre $\beta > 0$ c'est à dire que W admet une densité de probabilité g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 0 & \forall x < 0 \\ g(x) = \beta e^{-\beta x} & \forall x \geqslant 0 \end{cases}$$

   Soient k un nombre réel strictement supérieur à 1 et x_0 un nombre réel strictement positif.

   Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $T = x_0 k^W$? Quelle loi reconnaît-on ?

5. Soit une variable aléatoire X suivant $VP(\alpha, x_0)$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\sqrt{X}$.

B. Propriété caractéristique de la loi de Pareto.

Soient une variable aléatoire X de densité f, admettant une espérance, et un nombre réel x tel que $\int_x^{+\infty} f(t)\, dt \neq 0$.

On appelle moyenne de X sur $[x, +\infty[$ le nombre réel $M(x)$ égal à $\dfrac{\int_x^{+\infty} t f(t)\, dt}{\int_x^{+\infty} f(t)\, dt}$.

1. Montrer que $M(x) \geqslant x$.

2. Dans cette question on suppose que la variable X suit $VP(\alpha, x_0)$ avec $\alpha > 1$. Calculer $M(x)$ pour $x \geqslant x_0$.

3. Réciproquement soient un nombre réel x_0 strictement positif et une variable aléatoire X à valeurs dans $[x_0, +\infty[$, de densité f continue et à valeurs strictement positives sur $[x_0, +\infty[$, admettant une espérance et telle qu'il existe un réel $k > 1$ tel que : $M(x) = k\,x \;\forall x \geqslant x_0$

   On se propose d'établir que X suit une loi de Pareto à deux paramètres.

   On pose, pour $x \geqslant x_0$, $G(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\, dt$, et $H(x) = \int_x^{+\infty} t f(t)\, dt$.

   (a) Montrer que G et H sont dérivables sur $[x_0, +\infty[$ et calculer leur dérivée.

   (b) Prouver que $G(x) = \frac{1-k}{k} x\, G'(x)$ pour $x \geqslant x_0$.

   (c) Pour $x \geqslant x_0$, on pose $I(x) = x^{\frac{k}{k-1}} G(x)$. Calculer $I'(x)$ et en déduire la valeur de $G(x)$.

   (d) En déduire que X suit $VP\left(\frac{k}{k-1}, x_0\right)$.

C. Un exemple statistique : la démographie.

Des statistiques sur la démographie du département des Ardennes en 1962 indiquent la répartition de la population des 450 communes de ce département.
On note :
x : Nombre d'habitants,
$N(x)$: Nombre de communes possédant plus de x habitants,
et on dispose du tableau suivant :

x	$N(x)$
1800	20
1300	30
700	50
380	100
250	150
180	200
140	250
110	300
85	350
60	400

Ces données sont représentées dans le graphique figurant sur la page 5 (sur papier ln ln) de l'énoncé, graphique qui n'est pas à reproduire sur la copie.
Le graphique représente les points d'abscisse In (x) et d'ordonnée In N (x) pour les valeurs x du tableau.
Une étude statistique permet d'estimer que ce nuage de points peut être modélisé par une droite D (figurant sur le graphique)

1. Lire, sur le graphique, le coefficient directeur de D.
2. Expliquer pourquoi on peut modéliser la distribution de la taille des communes par une loi de Pareto à deux paramètres $VP(\alpha, x_0)$
3. Donner, d'après le graphique, une valeur approchée de a.

D.Comparaison de deux modes d'imposition sur le revenu.

Soient X une variable aléatoire de densité f, g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et Y la variable aléatoire définie par $Y = g(X)$.
On admet que si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x)\, dx$ est absolument convergente, alors Y admet une espérance $E(Y)$ donnée par la valeur de cette intégrale.
Dans cette partie, X représente la valeur du revenu d'un individu d'une population donnée. On suppose que X est une variable aléatoire qui suit $VP(\alpha, x_0)$ avec $\alpha > 1$.
Y représente la valeur Je l'impôt correspondant, fonction du revenu X. On désire que l'impôt ne touche que les revenus supérieurs ou égaux à h, h réel donné tel que $h \geqslant x_0$.

1. Calcul d'un impôt proportionnel.

   Soient p un nombre réelstrictement compris entre 0 et 1 et g_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$\begin{cases} g_1(x) = 0 & \forall x < h \\ g(x) = p(x-h) & \forall x \geqslant h \end{cases}$$

   On pose $Y_1 = g_1(X)$. Vérifier que g_1 est continue et montrer que Y_1 admet une espérance que l'on calculera.

2. Calcul d'un impôt progressif.
   On dit que l'impôt est progressif si le quotient de l'impôt par le revenu est une fonction croissante du revenu.
   Soit $m \in]0,1[$ et, q un réel strictement positif.
   On définit la fonction g_2 sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} g_2(x) = 0 & \forall x < h \\ g_2(x) = m\left(\dfrac{x-h}{x}\right)^q x & \forall x \geqslant h \end{cases}$$

   On pose $Y_2 = g_2$

   (a) Vérifiez que l'impôt est bien progressif et interpréter m.
   (b) Montrer que g_2 est continue et que Y_2 admet une espérance. À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{x-h}{x}$, prouver que :

$$E(Y_2) = \frac{m\,\alpha\,x_0^\alpha}{h^{\alpha-1}} \int_0^1 u^q (1-u)^{\alpha-2}\,du$$

   (c) En intégrant par parties, calculer $E(Y_2)$ pour $q \in \mathbb{N}^\times$.

3. On suppose encore dans cette question que q est un entier strictement positif.
   Déterminer le quotient $\dfrac{p}{m}$, en fonction de α et q, de sorte que $E(Y_1) = E(Y_2)$

PARTIE II. Courbe de concentration et inégalité des revenus.

La Courbe de concentration est une courbe statistique introduite par Lorentz et développée par Gini pour rendre compte de l'inégalité de la distribution des revenus.
On désigne par F_x la proportion des individus d'une population donnée ayant un revenu inférieur ou égal à x et par Q_x le quotient de la masse des revenus de ces mêmes individus par la masse totale des revenus de la population.
On appelle courbe de concentration la représentation graphique de la fonction C donnant Q_x en fonction de F_x.
Dans toute la suite , X est une variable aléatoire qui représente le revenu d'un individu de cette population.
On suppose que X suit $VP(\alpha, x_0)$ avec $\alpha > 1$.
On note F la fonction de répartition de X, $E(X)$ son espérance et on pose $Q(x) = \dfrac{1}{E(X)} \int_{x_0}^{x} t\,f(t)\,dt$ pour $x \geqslant x_0$.
On appelle indice d'inégalité de Gini de la variable X le réel $I(x)$ qui est égal à deux fois l'aire située entre la courbe de concentration de X et la première bissectrice.
C'est à dire : $I(x) = 2\int_0^1 (t - C(t))\,dt$.
On estime que plus $I(x)$ est grand, plus l'inégalité des revenus est grande.

1. (a) Calculer $Q(x)$ pour $x \geqslant x_0$.
   (b) On pose $C(t) = 1 - (1-t)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$ pour $t \in [0,1[$ et $C(1) = 1$
   Vérifier que $(C \circ F)(x) = Q(x)$ pour $x \geqslant x_0$.
   Ainsi la courbe représentative de C est la courbe de concentration de X.
   (c) Étudier les variations de C et tracer son graphe dans un repère orthonormé en précisant les tangentes aux deux extrémités.
   (d) Prouver que : $C(t) \leqslant t \quad \forall t \in [0,1]$.
   Cette inégalité n'était-elle pas prévisible sans calcul ?
   (e) Déterminer α si on sait que 30% des individus ayant les plus hauts revenus se partagent 60% de la masse des revenus.
   Dans la suite α n'est plus supposé égal à cette valeur.
   (f) Montrer que $I(x) = \dfrac{1}{2\alpha - 1}$.

2. On prélève sur tous les revenus un impôt proportionnel au revenu c'est à dire que, si Y désigne le revenu disponible après imposition, $Y = (1 - \lambda) X$ avec $\lambda \in]0, 1[$.

    (a) Calculer $I(Y)$. On pourra utiliser les résultats de I.A.3.

    (b) Quel est l'effet de cette imposition sur l'inégalité des revenus ?

3. On prélève sur tous les revenus un impôt progressif tel que, si T désigne le revenu disponible après imposition, on ait $T = h\sqrt{X}$ (h désignant un réel positif).

    (a) À l'aide de la partie I, déterminer la loi de T et calculer $I(T)$.

    (b) Quel est l'effet de cette imposition sur l'inégalité des revenus ?