CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Année 1998

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Notation

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
Toutes les variables aléatoires, considérées dans chaque partie de ce problème, sont des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega; A; P)$.
Si X et Y sont deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 1 et 2, on note $E(X)$ l'espérance de X, $V(X)$ sa variance et $cov(X;Y)$ la covariance de X et Y.
On rappelle l'inégalité : $cov\,(X;Y) \leqslant \sqrt{V\,(X)\,V\,(Y)}$.
Un gestionnaire investit un capital parmi n actifs, notés A_1, A_2,..., A_n (par exemple des actions), disponibles sur le Marché Boursier. Les rendement à un an de ces actifs, exprimés en pourcentage sont des variables aléatoires R_1, R_2,..., R_n admettant des moments d'ordre 1 et 2. Par exemple si l'actif $A\,_1$ a rapporté 6%, R_1 prend la valeur 6.
Le gestionnaire constitue un portefeuille, c'est à dire un n-uplet $(x_1; x_2; ...; x_n)$ tel que pour tout $i \in \{1; ...; n\}$, $x_i \geqslant 0$ avec $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. Chaque coefficient x_i représente la proportion de capital dans l'actif A_i. Par exemple, si n vaut 3 et si le gestionnaire investit un quart du capital dans l'actif A_1, la moitié du capital dans l'actif A_2 et le quart du capital dans l'actif A_3, le portefeuille vaut $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$. Si $(x_1; x_2; ...; x_n)$ est un porte feuille donné, le rendement (en pourcentage) est la variable aléatoire $R = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i R_i$.
Notre gestionnaire prudent désire minimiser les risques et recherche pour cela les portefeuilles dont le rendement est de variance minimale, sous certaines hypothèses.

Partie 1

Dans cette partie n vaut 2 et les rendement des actifs A_1 et A_2 sont notés respectivement X et Y.

1. On suppose que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes telles que : $V(X) = 2, V(Y) = 4$.

   (a) Pour un réel a, $a \in [0;1]$, on considère le portefeuille $(a; 1-a)$ de rendement R.
   Calculer $V(R)$.

   (b) On définit sur R la fonction h par : $h(x) = 6x^2 - 8x + 4$. En étudiant les variations de h sur $[0;1]$, montrer qu'il existe un unique portefeuille, à déterminer, dont le rendement est de variance minimale.

2. (a) Soit N un entier strictement positif et Z une variable aléatoire de loi uniforme sur $[1;N] \cap \mathbb{N}$.
   Donner la valeur de $E(Z)$ et calculer $V(Z)$. On rappelle que $\sum\limits_{k=1}^{N} k^2 = \dfrac{N\,(N+1)\,(2N+1)}{6}$.
   On suppose que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes telles que X suit la loi uniforme sur $[1;5] \cap \mathbb{N}$ et Y suit la loi uniforme sur $[1;7] \cap \mathbb{N}$.

   (b) Donner les valeurs de $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$, $V(Y)$.

   (c) Calculer $P(2X + Y \leqslant 8)$. On considère le portefeuille dont le rendement R_0 est de variance minimale.
   Calculer la probabilité que ce rendement R_0 soit supérieur ou égal à 3.

3. On suppose dans cette question que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes telles que X suit la loi de Poisson de paramètre 2 et Y suit la loi de Poisson de paramètre 4.
   Notre gestionnaire toujours prudent, veut de plus constituer un portefeuille dont le rendement est en moyenne supérieur ou égal à 3.

   (a) Montrer que, parmi les portefeuilles dont le rendement R vérifie : $E(R) \geqslant 3$, celui dont le rendement est de variance minimale est $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$. On note R_0 le rendement de ce portefeuille.

   (b) Calculer la probabilité que ce rendement R_0 soit supérieur ou égal à 3. On donne $F_6(5) \approx 0,45$, où F_6 est la fonction de répartition de la loi de Poisson de paramètre 6.

Partie 2

Dans cette partie n vaut 2 et les rendement des actifs A_1 et A_2 sont notés respectivement X et Y.

1. On suppose que X et Y sont des variables aléatoires telles que : $V(X) = 4$, $V(Y) = 3$, $cov(X;Y) = c$, où c est un nombre réel donné.

   (a) Montrer que l'on a : $|c| \leqslant 2\sqrt{3}$.

   (b) Pour un réel a de $[0;1]$, on considère le portefeuille $(a; 1-a)$ de rendement R.
   Montrer que l'on a : $V(R) = (7 - 2c)a^2 + 2(c-3)a + 3$.

   (c) Montrer qu'il existe un unique portefeuille dont le rendement est de variance minimale.
   On déterminera ce portefeuille en fonction de c, en distinguant les deux cas $c \in \left[-2\sqrt{3}; 3\right[$ et $c \in \left[3; 2\sqrt{3}\right]$.

2. Dans cette question (X ; Y) est un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi conjointe est donnée par :
$$P(X = 0; Y = 4) = 1/2, \quad P(X = 4; Y = 4) = P(X = 4; Y = 8) = 1/4.$$

   (a) Déterminer les lois marginales de X et Y.

   (b) Calculer les valeurs de $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$, $V(Y)$, $cov(X;Y)$.

   (c) Déterminer le portefeuille de rendement de variance minimale.
   On note R_0 le rendement de ce portefeuille.

   (d) Calculer la probabilité que ce rendement R_0 soit supérieur ou égal à 3.

Partie 3

Dans cette partie n vaut 3 et les rendement des actifs A_1, A_2 et A_3 sont notés respectivement X, Y et Z. On suppose de plus que :

$$V(X) = V(Y) = 7, \quad V(Z) = 4, \quad cov(X;Y) = 1, \quad cov(X;Z) = cov(Y;Z) = -4.$$

1. La fonction F et l'ensemble H sont définis comme suit :

$$H = \{(x;y;z) \in (\mathbb{R}_+)^3, \quad x+y+z=1\}$$

et pour tout $(x;y;z) \in (\mathbb{R}_+)^3$,

$$F(x;y;z) = 7x^2 + 7y^2 + 4z^2 + 2xy - 8xz - 8yz.$$

On considère le rendement $R = xX + yY + zZ$. Montrer que $V(R) = F(x;y;z)$.

2. Notre gestionnaire, cherchant à constituer un portefeuille de rendement de variance minimale, veut déterminer le minimum (s'il existe) de la fonction F sur l'ensemble H.

(a) La fonction f et l'ensemble K sont définis comme suit :

$$K = \{(x;y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad x+y \leqslant 1\}$$

et pour tout $(x;y) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$f(x;y) = 19x^2 + 19y^2 + 26xy - 16x - 16y + 4.$$

Montrer que le problème du gestionnaire équivaut à déterminer le minimum (s'il existe) de f sur K.

(b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f sur $\mathbb{R}^2$.

(c) Montrer que f admet un minimum local sur $\mathbb{R}^2$ atteint au point$(x_0;y_0)$ que l'on déterminera. Calculer $f(x_0;y_0)$.

(d) En déduire qu'il existe un portefeuille à déterminer de rendement de variance minimale.

(e) Montrer que : pour tout $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$

$$F(x;y;z) = 3(x-y)^2 + 4(x+y-z)^2,$$

et retrouver le résultat du d)

Partie 4

Dans cette partie n vaut 3 et les rendement des actifs A_1, A_2 et A_3 sont notés respectivement X, Y et Z.

1. On suppose que :

$$V(X) = V(Y) = V(Z) = 1, \quad cov(X;Y) = cov(X;Z) = cov(Y;Z) = c,$$

où c est un nombre réel donné.

On considère la matrice à coefficient réels d'ordre 3 ; $M = \begin{pmatrix} 1 & c & c \\ c & 1 & c \\ c & c & 1 \end{pmatrix}$.

(a) On note $\mathfrak{M}_{3;1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelle ayant 3 lignes et 1 colonne.

On considère un élément de $\mathfrak{M}_{3;1}(\mathbb{R})$: $U = \begin{pmatrix} X \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et la variable aléatoire : $T = xX + yY + zZ$.

Montrer qu'on a : $V(T) = {}^tUMU$, où ${}^tU$ désigne la transposée de U.

(b) Montrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

(c) Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de M. (On distinguera les cas $c = 0$ et $c \neq 0$)

(d) En déduire que $c \in [-\frac{1}{2}; 1]$.

(e) On suppose : $c \neq 0$. On considère le porte feuille $(x; y; z)$ de rendement R.
Montrer que l'on a :

$$V(R) = (1-c)\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2\right] + \frac{1+2c}{3}.$$

En déduire qu'il existe un unique portefeuille, à déterminer, de rendement de variance minimale.

2. On suppose dans cette question que X, Y et Z sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale de paramètre 10 et $\frac{1}{2}$.

(a) Montrer que le portefeuille de variance minimale est $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
Déterminer la variance de ce rendement.

(b) Quelle est la loi de $X+Y+Z$? En déduire, à l'aide de la loi normale, une approximation de la probabilité que le rendement R du portefeuille ci-dessus soit supérieur ou égal à 4. On donne $\Phi\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right) \simeq 0,86$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.