CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
**DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT**
Direction des Admissions et concours

---

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

---

**OPTION ECONOMIQUE**

MATHEMATIQUES III

**Année 1998**

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*
*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

# EXERCICE I

1. (a) Soit $\mu$ un paramètre réel. On considère le système d'équations

$$(1)\left\{\begin{array}{ll} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ 3x_1 + \mu x_2 + 2x_3 & = 0 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 & = 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \end{array}\right.$$ d'inconnues $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$.

i. Montrer que ce système admet les mêmes solutions que le système $(2)\left\{\begin{array}{lll} \mu x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = & 0 \\ (3-\mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = & 0 \\ -2\mu x_1 + (3-\mu^2)x_4 & = & 0 \end{array}\right.$

ii. Résoudre, en discutant suivant les valeurs de $\mu$, le système $\left\{\begin{array}{lll} (3-\mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = & 0 \\ -2\mu x_1 + (3-\mu^2)x_4 & = & 0 \end{array}\right.$

iii. Déterminer enfin, suivant les valeurs de $\mu$, les solutions du système (1).

(b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$ on note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à $n$ et, à toute fonction polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[x]$, on associe la fonction polynôme $T_nP$ définie sur $\mathbb{R}$ par $T_nP(x) = (nx+1)\,P(x) + (1-x^2)\,P'(x)$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, l'application $P \mapsto T_nP$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

   (b) Donner la matrice $M_n$ de cet endomorphisme $T_n$ dans la base de $\mathbb{R}_n[x]$ formée des fonctions polynômes $1,\ X, \dots\ X^n$ où $X^k$ désigne, pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$, la fonction $x \mapsto x^k$.

   (c) Dans le cas $n = 3$, donner les valeurs propres de $T_3$ et écrire les fonctions polynômes formant une base de vecteurs propres.

   (d) En faisant la somme des lignes de la matrice $M_n$, déterminer simplement une valeur propre de $T_n$.

3. On se propose de déterminer plus généralement toutes les valeurs propres de $T_n$.

   (a) Etant donné un réel $\lambda$ calculer, pour $-1 < x < 1$, l'intégrale $g_\lambda(x) = \int_0^x \frac{nt+1-\lambda}{1-t^2}\,dt$. On cherchera d'abord deux réels $a$ et $b$ tels que $\frac{nt+1-\lambda}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$

   (b) Montrer que si les nombres $h = n+1-\lambda$ et $k = n-1+\lambda$ sont des nombres entiers, positifs ou nuls, pairs, alors la fonction $\exp(-g_\lambda(x))$ est une fonction polynôme. Vérifier que ces conditions impliquent que $-(n-1) \leqslant \lambda \leqslant n+1$.

   (c) Pour $n = 3$ quels sont les réels $\lambda$ qui vérifient les conditions précédentes ? Pour un entier $n \geqslant 1$ quelconque, combien de réels $\lambda$ vérifient ces conditions ?

   (d) Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de $T_n$ et si $P_\lambda$ est un vecteur propre associé, alors la fonction $h$, définie sur $]-1, 1[$ par $h(x) = P_\lambda(x)\exp(g_\lambda(x))$, a une dérivée nulle. Que vaut alors $P_\lambda$ ?

   (e) Déterminer les valeurs propres de $T_n$ et une base de vecteurs propres (on pourra distinguer les cas $n$ pair et $n$ impair).

# EXERCICE II

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et que, à chaque lancer, la pièce donne face avec la probabilité $p$ $(0 < p < 1)$ et pile avec la probabilité $q = 1-p$. L'objet de l'exercice est l'étude du nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux faces de suite, c'est à dire lors de deux lancers consécutifs.
On suppose donné un espace probabilisé, muni d'une probabilité $P$, modélisant cette expérience.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note

- $U_n$ l'événement : *on obtient 2 faces de suite, pour la première fois, aux lancers numéro $n$ et $n+1$,*

et on pose $u_n = P(U_n)$.
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note

- $A_n$ l'événement : *les $n$ premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le $n$-ième lancer donne face,*
- $B_n$ l'événement : *les $n$ premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le $n$-ième lancer donne pile,*

et on pose $x_n = P(A_n)$, $y_n = P(B_n)$.

1. (a) Déterminer $u_1$ ; $x_2,\ y_2,\ u_2$ ; $x_3,\ y_3,\ u_3$.

   (b) Trouver, pour $n \geqslant 2$, une relation simple entre $x_n$ et $u_n$.

   (c) Pour tout $n \geqslant 2$ déterminer les probabilités conditionnelles
   $P(A_{n+1} / A_n)$, $P(A_{n+1} / B_n)$, $P(B_{n+1} / A_n)$, $P(B_{n+1} / B_n)$.

   (d) En déduire, pour tout $n \geqslant 2$, les relations de récurrence suivantes : $\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & p y_n \\ y_{n+1} & = & q(x_n + y_n) \end{array}\right.$

2. On suppose, dans cette question, que $p = q = \dfrac{1}{2}\cdot$

   (a) Soit $(f_n)_{n \geqslant 0}$ la suite de nombres entiers définie par les conditions :
   $f_0 = 1,\ f_1 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\,.$
   Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $2^n y_n = f_n$.

   (b) On pose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot$ Montrer que l'on a, pour tout entier $n \geqslant 0$, $\quad f_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\cdot$

   (c) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 2$, une expression de $x_n$, puis de $u_n$, en fonction de $n, \alpha$ et $\beta$.

   (d) Vérifier que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = 1$, c'est à dire que la probabilité d'obtenir deux faces de suite au bout d'un nombre fini de lancers est égale à 1.

3. On considère maintenant le cas où $p = \dfrac{2}{3}$.
   Donner, pour tout entier $n \geqslant 1$, une expression de $u_n$ en fonction de $n$.