CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Année 2000

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Ce problème se compose de cinq parties : il étudie deux suites de variables aléatoires discrètes et une simulation informatique. Si le candidat ne parvient pas à établir un résultat demandé, il l'indiquera clairement, et il pourra pour la suite ,admettre ce résultat.
Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans U_n . On note k le numéro de cette boule. Si k est égal à 1, on arrête les tirages. Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne. On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1. On note Y_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules tirées. On note $E(X_n)$ et $V(X_n)$ (respectivement $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$) l'espérance et la variance de X_n (respectivement Y_n).

Partie 1.

1. On pose : $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$

   (a) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, les inégalités :

   $$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$$

   où ln désigne le logarithme népérien.

   (b) En déduire les inégalités : $\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln n$

(c) Déterminer un équivalent simple de h_n quand n tend vers l'infini.

2. On pose : $k_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$

   (a) Montrer, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, l'inégalité

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

   (b) En déduire la majoration $k_n \leqslant 2$

   (c) Déterminer un équivalent simple de $h_n - k_n$ quand n tend vers l'infini.

Partie 2 : Etude de la variable aléatoire $\mathbf{X}_n$

On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1. (a) Quelle est la loi de I_n?

   (b) Quelle est la loi conditionnelle de X_n sachant $I_n = 1$?

   (c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer :

$$\forall j \in \mathbb{N}^{\times}, \forall k \in \{1, 2\ , ..., n\}\,, \quad P\left(X_n = j/I_n = k\right) = P\left(X_{k-1} = j - 1\right)$$

2. (a) Quelle est la loi de X_1 ?

   (b) Quel est l'événement $(X_2 = 1)$? Donner la loi de X_2 , son espérance et sa variance.

   (c) Calculer $P(X_3 = 2/I_3 = 1)$, $P(X_3 = 2/I_3 = 2)$, $P(X_3 = 2/I_3 = 3)$. Déterminer la loi de X_3, son espérance et sa variance.

3. (a) Montrer que X_n prend ses valeurs dans $\{1, 2, ..., n\}$.

   (b) Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$

   (c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer la relation :

$$\forall j \geqslant 2, \quad P\left(X_n = j\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P\left(X_k = j - 1\right)$$

   (d) Si n est supérieur ou égal à 3 et j supérieur ou égal à 2, calculer : $nP\left(X_n = j\right) - (n-1)P\left(X_{n-1} = j\right)$
   En déduire, si n est un entier supérieur ou égal à 2 :

$$\forall j \geqslant 1, P\left(X_n = j\right) = \frac{n-1}{n} P\left(X_{n-1} = j\right) + \frac{1}{n} P\left(X_{n-1} = j - 1\right)$$

4. (a) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, en utilisant 3d. :

$$E\left(X_n\right) = E\left(X_{n-1}\right) + \frac{1}{n}$$

   (b) En déduire $E(X_n)$ et donner un équivalent simple de $E(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

5. (a) Si n est supérieur ou égal à 2, calculer $E(X_n^2)$ en fonction de $E(X_{n-1}^2)$ et de $E(X_{n-1})$.

   (b) En déduire: $V(X_n) = h_n - k_n$ (en reprenant les notations introduites en **Partie 1**).

   (c) Donner un équivalent de $V(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

6. Soit $(T_i)_{i\geqslant 1}$une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout i entier naturel non nul, T_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$. On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i = T_1 + ... + T_n$$

   (a) Vérifier que X_1 et T_1 ont même loi.
   (b) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier j non nul :

$$P(S_n = j) = \frac{1}{n} P(S_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n} P(S_{n-1} = j)$$

   En déduire que X_n et S_n ont même loi.
   (c) Retrouver ainsi $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

Partie 3 : Etude de la variable aléatoire $\mathbf{Y}_n$.

1. Donner la loi de Y_n.

   (a) Quelles sont les valeurs prises par Y_2 ?
   (b) Déterminer la loi de Y_2.

2. (a) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier j non nul et tout entier k supérieur ou égal à 2

$$P(Y_n = j / I_n = k) = P(Y_{k-1} = j-k)$$

   (b) Si n est supérieur ou égal à 2, en déduire, pour tout entier j supérieur ou égal à 1

$$P(Y_n = j) = \frac{n-1}{n} P(Y_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(Y_{n-1} = j-n)$$

   (c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer $E(Y_n) = E(Y_{n-1}) + 1$
   Que vaut $E(Y_n)$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1 ?

Partie 4. Simulation informatique.

Dans le langage informatique PASCAL, la fonction *random(n)* renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et $n-1$.
On donne la procédure suivante

```
Procedure Truc (n : integer ; vara, b : integer) ;
var alea : integer ;
Begin
alea := random (n)+1 ;
writeln (alea) ;
if alea > 1 then begin
                      a := a+l;
                      b := b+alea;
                      Truc (aleal,a,b)
                   end;
End;
```

et le programme principal suivant :

```
var n ,a,b :  integer ;
Begin
a := 1 ; b := 1; .
write ('n:')  ; readln (n);
Truc (n,a,b) ;
writeln ('a=',a,'b=',b),
End.
```

Que fait ce programme ? Que représentent a et b ?
Cet algorithme est récursif. Transformer ce programme en un programme itératif écrit en Pascal.

Partie 5.

On considère l'urne U_n contenant n boules numérotées entre 1 et n. A partir de l'urne U_n on effectue la suite de tirages décrite dans l'entête du problème. Pour i entier de $\{1, ..., n\}$, on définit $Z_i^{(n)}$ la variable aléatoire égal à 1 si, lors d'un quelconque de ces tirages, on a obtenu la boule numéro i, égale à 0 sinon.

1. Quelle est la loi de $Z_n^{(n)}$? Que dire de la variable $Z_1^{(n)}$?
2. (a) Si n est supérieur ou égal à 2, et i un entier de $\{1, ..., n-1\}$, montrer la relation

$$P\left(Z_i^{(n)} = 1\right) = \frac{1}{n} + \sum_{k=i+1}^{n} \frac{1}{n} P\left(Z_i^{(k-1)} = 1\right)$$

   (b) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^{\times}$ et pour tout i de $\{1, ..., n\}$, $Z_i^{(n)}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$.
3. Que vaut $\sum_{i=1}^{n} Z_i^{(n)}$? Retrouver ainsi $E(X_n)$.
4. Retrouver $E(Y_n)$.