CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES I

Année 2000

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de deux exercices indépendants.

Exercice I

1. Soit a un réel strictement positif.

   (a) Montrer que l'équation $x = \sqrt{x} + a$ possède une unique solution réelle positive ou nulle qu'on précisera. On note $l\left(a\right)$ cette solution. Préciser la valeur de $l\left(1\right)$ et comparer, suivant les valeurs de a, les réels $l\left(a\right)$ et $l\left(1\right)$.

   (b) Étudier les variations de la fonction f_a définie, pour tout réel x positif ou nul, par: $f_a\left(x\right) = x - \sqrt{x} - a$. Donner son tableau de variation (on placera la valeur $l\left(a\right)$ dans ce tableau). Quel est, suivant la valeur de x, le signe de $f_a\left(x\right)$?

2. On considère la suite réelle $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ définie par son premier terme u_1 strictement positif et, pour tout entier naturel n non nul, par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n}$.
   Justifier l'inégalité $u_2 > 1$.
   Soit n un entier naturel au moins égal à 2 vérifiant $u_n > 1$; établir l'inégalité $u_{n+1} > 1$ et en déduire que la suite $\left(u_n\right)_{n\geqslant 2}$ est strictement minorée par 1.

3. Montrer que si la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ converge, alors sa limite est 1.

4. Dans cette question, on suppose vérifiée la propriété suivante :

$$(H) \quad \text{Pour tout entier naturel non nul, } u_n \leqslant l\left(\frac{1}{n}\right)$$

   (a) Pour tout entier naturel n non nul, établir l'inégalité : $u_n \leqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

   (b) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de $f_{\frac{1}{n}}(u_n)$ puis, à l'aide du tableau de variation de $f_{\frac{1}{n}}$, prouver que la suite est croissante.

   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ converge vers un réel strictement supérieur à 1 et aboutir à une contradiction.
   Ainsi la propriété (H) n'est pas vérifiée.

5. On note m un entier naturel non nul vérifiant $u_m > l\left(\dfrac{1}{m}\right)$.

   (a) Établir l'inégalité : $u_{m+1} < u_m$.

   (b) Soit n un entier naturel au moins égal à m vérifiant $u_{n+1} < u_n$; établir l'inégalité $u_{n+2} < u_{n+1}$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant m}$ est strictement décroissante.

   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ converge vers 1.

Exercice II

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé dont la probabilité est notée $\mathbf{P}$. On note $\mathbf{E}(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X.

1. Montrer que l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$, et que sa variance est égale à $\dfrac{1}{\lambda^2}$.

2. On suppose que la durée d'utilisation, en mois, d'un pneu de vélo neuf, avant qu'il ne crève, est une variable aléatoire, notée X, suivant la loi exponentielle de paramètre $0,05$..

   (a) Préciser l'espérance et la variance de X.

   (b) Quelle est la probabilité qu'un pneu ne crève pas pendant les deux premières années de son utilisation? On donne : $\exp(-1,2) \simeq 0,301$.

   (c) Sachant qu'au bout d'un an d'utilisation, le pneu n'a pas crevé, quelle est la probabilité qu'il ne crève pas au cours des deux années suivantes?

3. Déterminer le réel positif μ vérifiant : $\mathbf{P}([X > \mu]) = \dfrac{1}{2}$. On donne: $\ln 2 \simeq -0,693$.

4. On considère un vélo muni de deux pneus neufs et on note X_1 la variable aléatoire représentant la durée d'utilisation, jusqu'à sa première crevaison, du pneu avant et, de même, on note X_2 la variable aléatoire représentant la durée d'utilisation du pneu arrière jusqu'à sa première crevaison.
   On suppose que les variables X_1 et X_2 suivent la même loi que X et que, pour tout couple (X_1, X_2) de réels, les événements $[X_1 \leqslant x_1]$ et $[X_2 \leqslant x_2]$ sont indépendants.
   On note T la variable aléatoire égale à la durée d'utilisation du vélo avant que l'un ou l'autre des deux pneus ne crève.

   (a) Pour tout réel positif t, exprimer l'événement $[T > t]$ à l'aide des variables X_1 et X_2 et en déduire la fonction de répartition de la variable T. Reconnaître la loi de T et donner les valeurs de son espérance et de sa variance.

(b) On note T la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres (aléatoires) X_1 et X_2.

i. Pour tout réel positif t, exprimer l'événement $[T' \leqslant]$ à l'aide des variables X_1 et X_2 et en déduire la fonction de répartition de la variable T' puis une densité de celle-ci.

ii. Calculer l'espérance de T'. Pourquoi, intuitivement, pouvait-on prévoir l'encadrement: $20 \leqslant E(T') \leqslant 40$?

(c) Déterminer les réels m et m' vérifiant: $\mathbf{P}([T > m]) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}([T' > m']) = \frac{1}{2}$

On donne : $\ln\left(\sqrt{2}-1\right) \simeq -0,881$.

5. On suppose que le prix d'achat du vélo est égal à C_0 euros (où C_0 est un réel strictement positif) et que sa valeur marchande est une fonction C qui évolue au cours du temps, exprimé en mois, suivant la formule :

$$C(t) = C_0 \exp\left(-\frac{t}{20}\right)$$

Ainsi, par exemple, la valeur marchande du vélo, deux ans après son achat, est $C(24)$.

(a) Étudier les variations de la fonction C sur $\mathbb{R}_+$ et donner son tableau de variation.

(b) Soit Y la variable aléatoire désignant la valeur marchande du vélo quand, pour la première fois, un de ses pneus crève.

Exprimer Y à l'aide de C_0 et de T.

En déduire que la fonction de répartition G de Y est donnée par :

$$\begin{cases} G(y) = 0 & \text{si} \quad y \leqslant 0 \\ G(y) = \left(\dfrac{y}{C_0}\right)^2 & \text{si} \quad 0 < y \leqslant C_0 \\ G(y) = 1 & \text{si} \quad C_0 < y \end{cases}$$

(c) Donner une densité de la variable Y.

Calculer, en fonction de C_0 , l'espérance et la variance de la variable Y.

(d) On suppose que le coût de la réparation d'un pneu, quand il crève, est de $\frac{C_0}{50}$ euros.

Quelle est la probabilité que le coût de la réparation soit supérieur ou égal au dixième de la valeur marchande du vélo quand le premier de ses pneus crève?

(e) Soit Z la variable aléatoire égale à $\frac{1}{Y}$. Montrer que la fonction de répartition H de Z est donnée par :

$$\begin{cases} H(z) = 0 & \text{si} \quad z < \dfrac{1}{C_0} \\ H(z) = 1 - \left(\dfrac{1}{zC_0}\right)^2 & \text{si} \quad \dfrac{1}{C_0} \geqslant z \end{cases}$$

Reconnaître la loi de Z et calculer son espérance en fonction de C_0.

(f) Comparer $\mathbf{E}(Z)$ et $\dfrac{1}{\mathbf{E}(Y)}$.