CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES I

Année 2001

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de deux exercices indépendants.

EXERCICE I

Une élection comporte trois candidats et n votants, où n est un entier supérieur ou égal à 3. Chaque votant donne sa voix à l'un ou l'autre de ces trois candidats. Tout candidat qui a obtenu au moins une voix est élu.
On suppose que chaque vote se porte au hasard, de façon équiprobable, sur un de ces candidats et que les votes sont mutuellement indépendants.
Le vote se faisant par correspondance, le dépouillement se fait au fur et à mesure de la réception des bulletins de vote et, pour tout entier naturel k au plus égal à n, on note u_k la probabilité qu'après réception du k-ième bulletin, un seul candidat ait obtenu des voix, v_k la probabilité qu'après réception du k-ième bulletin, exactement deux candidats aient obtenu au moins une voix chacun et w_k la probabilité qu'après réception du k-ièmebulletin, les trois candidats aient obtenu au moins une voix chacun.

1. (a) Préciser les nombres u_1, v_1 et w_1.
   (b) Justifier les égalités : $\quad u_2 = \dfrac{1}{3}, \quad v_2 = \dfrac{2}{3}, \quad w_2 = 0.$
   (c) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer qu'il existe une matrice M vérifiant pour tout entier naturel k non nul et srictement inférieur à n:

$$\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix}$$

(d) En déduire l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$$

2. Soit A la matrice donnée par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Calculer la matrice A^2.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul k, il existe des nombres réels a_k, b_k, c_k vérifiant l'égalité $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_k & 2^k & 0 \\ b_k & c_k & 3^k \end{pmatrix}$ et les relations $\left\{ \begin{pmatrix} a_{k+1} = a_k + 2^{k+1} \\ b_{k+1} = b_k + 2c_k \\ c_{k+1} = 2c_k + 3^k \end{pmatrix} \right.$

(c) Pour tout entier naturel non nul k, on pose : $d_k = a_{k+1} - a_k$ et $q_k = \dfrac{c_{k+1}}{2^{k+1}} - \dfrac{c_k}{2^k}$.
Montrer que les suites $(d_k)_{k\in\mathbb{N}.^\times}$ et $(q_k)_{k\in\mathbb{N}.^\times}$ sont deux suites géométriques et préciser leurs raisons.

(d) Calculer de deux façons différentes, pour tout entier naturel k non nul, les sommes $\sum_{j=1}^{k-1} d_j$ et $\sum_{j=1}^{k-1} q_j$.
En déduire les égalités : $\left\{ \begin{pmatrix} a_k = 2^{k+1} - 2 \\ c_k = 3^k - 2^k \end{pmatrix} \right.$

(e) Exprimer, pour tout entier naturel non nul k, $b_{k+1} - b_k$ en fonction de k.
En déduire, par une méthode analogue à celle de la question d), l'égalité : $b_k = 3^k - 2^{k+1} + 1$.

3. (a) Exprimer la matrice M^{n-1} à l'aide de la matrice A^{n-1} et en déduire les égalités :
$$\begin{cases} u_n = & \dfrac{1}{3^{n-1}} \\ v_n = & \dfrac{2^n - 2}{3^{n-1}} \\ w_n = & 1 - \dfrac{2^n - 1}{3^{n-1}} \end{cases}$$

(b) Déterminer les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$. Ces résultats étaient-ils prévisibles ?

(c) À partir de quel nombre n de votants est-on certain à 99% qu'au moins deux candidats sont élus ?

EXERCICE II

Cet exercice étudie la fécondité des femmes d'un pays totalement imaginaire, la *Syldavie.*

1. **Fécondité des femmes syldaves tout au long de leur vie.**
On estime que le nombre d'enfants mis au monde par une femme syldave, au cours de sa vie, est une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre 2.

(a) Donner l'espérance de cette variable aléatoire.

(b) Calculer la probabilité p, pour une femme syldave, d'être mère et en donner une valeur approchée à $0,001$ près. (*On donne* $e^{-2} \simeq 0,135$)

(c) Calculer la probabilité pour une femme syldave d'avoir au moins quatre enfants, sachant qu'elle en a au moins un.

2. **Fécondité des femmes syldaves par tranche d'âge.**
On suppose, dans cette question, qu'aucune femme syldave n'est mère avant l'âge de 12 ans et qu'il existe une fonction f continue positive sur $\mathbb{R}^+$, nulle sur $\mathbb{R}^-$, vérifiant:

- pour tout intervalle J non vide de $\mathbb{R}^+$ de la forme $[a,\, b[$, le nombre d'enfants mis au monde par une femme syldave d'âge appartenant à l'intervalle $[12+a,\, 12+b[$, est une variable aléatoire N_J suivant la loi de Poisson de paramètre α_J donné par : $\alpha_J = \int_a^b f(t)\,dt$.
- pour tout intervalle J non vide de $\mathbb{R}^+$ de la forme$[a,\, +\infty[$, le nombre d'enfants mis au monde par une femme syldave d'âge appartenant à l'intervalle $[12+a,\, +\infty[$, est une variable aléatoire N_J suivant la loi de Poisson de paramètre α_J donné par : $\alpha_J = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$.

On suppose de plus que, si J et J' sont des intervalles disjoints, ayant l'une ou l'autre des formes précédentes, les variables aléatoires N_J et $N_{J'}$ sont indépendantes.

(a) Quelle doit être la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ pour que ces hypothèses soient cohérentes avec celles de la question 1. ?

(b) Justifier que, pour tout réel x positif, la probabilité pour une femme syldave de ne pas mettre au monde d'enfant avant l'âge $x+12$ est donnée par : $\mathbf{P}([N_{[0,x[} = 0]) = \exp\left(-\int_0^x f(t)\,dt\right)$.

(c) Montrer que, pour tout réel x positif, la probabilité pour une femme syldave de ne pas avoir mis au monde d'enfant avant d'atteindre l'âge $x+12$, sachant qu'elle est mère, est donnée par :

$$\mathbf{P}([N_{[0,x[} = 0]/[N > 0]) = \frac{1}{p}\exp\left(-\int_0^x f(t)\,dt\right)\left[1 - \exp\left(-\int_x^{+\infty} f(t)\,dt\right)\right]$$

Rappel: le nombre p a été défini dans la question 1.b).

3. **Étude d'une fonction auxiliaire.**

On suppose, dorénavant, que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}^-$ et définie pour tout réel t de $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(t) = \frac{1728\,t}{(t^2+432)^2}$$

Remarque : $12^2 = 144 = \dfrac{432}{3} = \dfrac{864}{6} = \dfrac{1728}{12}$.

(a) Étudier la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ et montrer qu'elle admet un maximum que l'on précisera.

(b) Donner l'allure de sa courbe représentative en précisant sa demi-tangente à l'origine et l'abscisse de son point d'inflexion.

(c) Calculer, pour tout réel x strictement positif, les intégrales $\int_0^x f(t)dt$, $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_x^{+\infty} f(t)dt$.

(d) En déduire l'expression, en fonction de p et de x, de la probabilité obtenue dans la question 2.c) .

4. **Âge d'une mère syldave à la naissance de son premier enfant.**

On suppose, dans cette question, que l'âge auquel une mère syldave met au monde son premier enfant est une variable aléatoire T prenant ses valeurs dans l'intervalle $[12, +\infty[$ et vérifiant, pour tout réel x positif:

$$\mathbf{P}([T > 12+x]) = \frac{1}{p}\exp\left(-\frac{2x^2}{x^2+432}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{864}{x^2+432}\right)\right]$$

(a) On pose $T' = T - 12$. Montrer que la variable aléatoire T' a pour densité la fonction g nulle sur $\mathbb{R}^-$ et définie pour tout t de $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(t) = \frac{1}{p}\frac{1728\,t}{(t^2+432)^2}\exp\left(-\frac{2t^2}{t^2+432}\right).$$

(b) *On donne :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+432}\,dt = \frac{\pi}{24\sqrt{3}}.$$

En effectuant une intégration par parties, prouver pour tout réel strictement positif x l'inégalité :

$$\int_0^{x} \frac{1728\,t^2}{(t^2+432)^2}\,dt \leqslant 12\sqrt{3}\,\pi$$

(c) En déduire, pour tout réel strictement positif x, l'inégalité : $\int_0^x t\,g(t)dt \leqslant \frac{12\sqrt{3}\,\pi}{p}$.

Que peut-on en déduire pour l'âge moyen d'une mère syldave à la naissance de son premier enfant ?