CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 2002

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE I

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle $AM = MB$, d'inconnue M, dans l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On rappelle que si U_1, U_2, U_3, U_4 sont les matrices définies par :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de E, qui est donc de dimension 4. Si A et B sont deux matrices de E, l'ensemble des matrices M de E vérifiant $AM = MB$ est noté $V_{A,B}$.

1. Soit A et B deux matrices de E et $\varphi_{A,B}$ l'application qui, à toute matrice M de E, associe la matrice $AM - MB$.

   (a) Montrer que $\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de E et en déduire que $V_{A,B}$ est un sous-espace vectoriel de E.

   (b) Dans le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, construire la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4). Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble $V_{A,B}$.

2. Dans cette question, r et s désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

   (a) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de E. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur x, y, z, t pour que M appartienne à $V_{D,\Delta}$.

   (b) En déduire une base de $V_{D,\Delta}$.

3. Soit a, b, c, d des réels non nuls vérifiant $a - b \neq c - d$, $a - b \neq 1$, $c - d \neq 1$, A et B les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que les valeurs propres de A sont 1 et $a - b$. En déduire qu'il existe une matrice inversible P de E, et une matrice D égale à celle de la question 2 pour une valeur convenable de r, telles que l'on ait : $D = P^{-1}AP$.

   (b) Justifier de même l'existence d'une matrice inversible Q de E, et d'une matrice Δ égale à celle de la question 2 pour une valeur convenable de s, telles que l'on ait : $\Delta = Q^{-1}BQ$.

   (c) Pour toute matrice M de E, montrer qu'elle appartient à $V_{A,B}$ si et seulement si la matrice $P^{-1}MQ$ appartient à $V_{D,\Delta}$. En déduire une base de $V_{A,B}$.

4. Dans cette question r, s et u, v désignent quatre réels vérifiant $r \neq s$, $r \neq v$, $u \neq s$, $u \neq v$, et on pose :

$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

   (a) Par une méthode analogue à celle de la question 2, déterminer $V_{D,\Delta}$.

   (b) En déduire, par une méthode analogue à celle de la question 3, le sous-espace vectoriel $V_{A,B}$ dans le cas où A et B sont deux matrices diagonalisables n'ayant aucune valeur propre commune.

EXERCICE II

Cet exercice met en évidence le fait que l'existence d'une espérance finie, pour une variable aléatoire, n'est pas toujours intuitive. Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle réel $[1, +\infty[$ et on suppose que toutes les variables aléatoires envisagées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Partie A : première approche

1. Montrer que l'application g définie par :

$$\begin{cases} g(t) = \dfrac{1}{t^2} & \text{si } t \in I \\ g(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I admettant g pour densité. Déterminer, pour tout réel t, la probabilité $\mathbf{P}([X \leqslant t])$ et montrer que X n'admet pas d'espérance.

3. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans I admettant g pour densité et telles que, pour tout réel t, les événements $[X \leqslant t]$ et $[Y \leqslant t]$ sont indépendants. On définit alors deux variables aléatoires U et V par : $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, $U(\omega)$ est le plus petit des nombres $X(\omega)$ et $Y(\omega)$, tandis que $V(\omega)$ est le plus grand de ces nombres.

(a) Pour tout réel t, exprimer l'événement $[V \leqslant t]$ à l'aide des variables aléatoires X et Y; en déduire la probabilité $\mathbf{P}([V \leqslant t])$.

(b) Montrer que la variable aléatoire V admet pour densité l'application h définie par :

$$\begin{cases} h(t) = & \dfrac{2(t-1)}{t^3} \quad \text{si } t \in I \\ h(t) = & 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

(c) De faç on analogue, calculer pour tout réel t la probabilité $\mathbf{P}([U > t])$ et en déduire que la variable aléatoire U admet pour densité l'application m définie par :

$$\begin{cases} m(t) = & \dfrac{2}{t^3} \quad \text{si } t \in I \\ m(t) = & 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

(d) Montrer que V n'admet pas d'espérance et que U admet une espérance que l'on calculera.

Partie B : Situation plus générale

Dans cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on suppose que n visiteurs, numérotés de 1 à n, se rendent aléatoirement dans un musée et que, pour tout entier de l'intervalle $[[1, n]]$, l'heure d'arrivée du visiteur numéro k est une variable aléatoire X_k admettant pour densité l'application g définie dans la partie **A**. On suppose de plus que, pour tout réel t, les événements $[X_1 \leqslant t]$, $[X_2 \leqslant t]$, $\ldots$, $[X_n \leqslant t]$ sont mutuellement indépendants. Si r est un entier de l'intervalle $[[1, n]]$, on note T_r la variable aléatoire désignant l'heure d'arrivée du r-ième arrivant. La partie **A** traite donc du cas $n = 2$, les variables aléatoires U et V étant respectivement égales à T_1 et T_2.

1. Soit t un élément de I fixé. Pour tout entier k de $[[1, n]]$, on note B_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque l'événement $[X_k \leqslant t]$ est réalisé et la valeur 0 sinon.

   (a) Préciser, en la justifiant soigneusement, la loi de la variable aléatoire Z définie par : $Z = B_1 + \ldots + B_n$

   (b) Pour tout entier r de l'intervalle $[[1, n]]$, exprimer l'événement $[T_r \leqslant t]$ à l'aide de la variable aléatoire Z et en déduire l'égalité:

   $$P([T_r \leqslant t]) = \sum_{k=r}^{n} C_n^k \left(1 - \frac{1}{t}\right)^k \left(\frac{1}{t}\right)^{n-k}$$

   (a) Vérifier, pour tout entier k de l'intervalle $[[1, n]]$, l'égalité : $\quad kC_n^k - (n+1-k)C_n^{k-1} = 0.$

   (b) En déduire que, pour tout entier r de l'intervalle $[[1, n]]$, la variable aléatoire T_r admet pour densité l'application f_r définie par :

   $$\begin{cases} f_r(t) = & rC_n^r \left(\dfrac{1}{t}\right)^{n+2-r} \left(1 - \dfrac{1}{t}\right)^{r-1} \quad \text{si } t \in I \\ f_r(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (c) Donner un équivalent à $tf_r(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et en déduire que les variables aléatoires T_1, T_2, $\ldots$, T_{n-1} admettent une espérance alors que T_n n'en admet pas.

2. Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose : $\quad J(p, q) = \int\limits_0^1 x^p (1-x)^q \, dx.$

   (a) À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, la relation :

   $$(p+1)\, J(p, q+1) = (q+1)\, J(p+1, q)$$

   (b) Calculer, pour tout entier naturel q, l'intégrale $J(0, q)$.

   (c) Montrer par récurrence sur p que, pour tout couple d'entiers naturels (p, q), on a : $J(p, q) = \dfrac{p!\, q!}{(1+p+q)!}$

3. Soit r un entier de l'intervalle $[[1, n-1]]$.

    (a) Si a est un réel strictement supérieur à 1, transformer en effectuant le changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$ l'intégrale $\int_1^a t\, f_r(t)\, \mathrm{d}t$.

    (b) En déduire la valeur de l'espérance de la variable aléatoire T_r en fonction de n et de r.