CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES I

Année 2002

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

Toutes les variables aléatoires envisagées dans cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé dont la probabilité est notée $\mathbf{P}$.

A. Soit X une variable aléatoire prenant chacune des valeurs -1, 0 et 1 avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$ et Y la variable aléatoire définie par $Y = X^2$.

1) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X, ainsi que l'espérance de la variable aléatoire Y.
2) Exprimer plus simplement en fonction de X et Y les variables aléatoires XY et Y^2.
3) En déduire la variance de Y et la covariance de X et de Y.
4) Tracer le tableau de la loi conjointe des variables aléatoires X et Y.
5) En déduire que ces variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

B. Dans cette sous-partie, p, q et λ sont trois réels de l'intervalle $]0,1[$, X est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p, Y une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre q et λ est la probabilité de l'événement $[X = 1] \cap [Y = 1]$.

1) Préciser les espérances et les variances des variables aléatoires X et Y.

2) Montrer que la variable aléatoire produit XY est une variable de Bernoulli et préciser son paramètre.

3) Tracer le tableau de la loi conjointe des deux variables aléatoires X et Y.

4) Calculer en fonction de $p,\ q,\ \lambda$, la covariance de X et de Y.

5) En utilisant le tableau de la loi conjointe, montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle. Ce résultat est-il valable pour tout couple $(X,\ Y)$ de variables aléatoires?

Problème

On appelle *durée de vie* d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle.
On considère un composant électronique dont la durée de vie est modélisée par une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, définie sur un espace probabilisé dont on note $\mathbf{P}$ la probabilité.
Toutes les variables aléatoires envisagées dans ce problème sont définies sur ce même espace probabilisé.
Le problème se compose de deux parties pouvant être traitées indépendamment.

Partie 1 : Cas discret

On suppose dans cette partie que T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^{\times}$.

A. Coefficient d'avarie

Pour tout entier naturel n, on note d_n la probabilité $\mathbf{P}([T > n])$ et on suppose, dans cette sous-partie, que cette probabilité n'est pas nulle quelque soit l'entier naturel n.

Le composant est mis en service à l'instant 0. Pour tout entier naturel n non nul, on appelle *coefficient d'avarie* à l'instant n du composant, la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant n, sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $n-1$, c'est-à-dire le nombre π_n défini par :

$$\pi_n = \mathbf{P}([T = n]/[T > n-1])$$

1) Justifier l'égalité $d_0 = 1$.
2) Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, la probabilité $\mathbf{P}([T = n])$ en fonction de d_n et de d_{n-1}, en déduire l'égalité : $\pi_n = \dfrac{d_{n-1} - d_n}{d_{n-1}}$.
3) Dans cette question, on suppose que T suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$, c'est-à-dire que, pour tout entier naturel non nul n, $\mathrm{P}([T = n])$ est donné par : $\mathrm{P}([T = n]) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \dfrac{1}{3}$.
   a) Quelle est l'espérance de la variable aléatoire T?
   b) Calculer, pour tout entier naturel n, d_n en fonction de n.
   c) En déduire pour tout entier naturel n non nul, l'égalité: $\pi_n = \dfrac{1}{3}$.
4) On suppose dans cette question que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \pi_n = \dfrac{1}{4}$.
   a) Établir, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $d_n = \dfrac{3}{4}\, d_{n-1}$.
   b) En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de d_n en fonction de n.
   c) Montrer enfin que T suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

B. Nombre moyen de pannes successives dans un cas particulier

On suppose, dans cette sous-partie, que la loi de T est donnée par : $\mathbf{P}([T = 1]) = \dfrac{1}{3}$ et $\mathbf{P}([T = 2]) = \dfrac{2}{3}$.

Un premier composant est mis en service à l'instant 0 et, quand il tombe en panne, il est remplacé instantanément par un composant identique qui sera remplacé à son tour à l'instant de sa première panne dans les mêmes conditions, et ainsi de suite. On suppose alors que, pour tout entier strictement positif i, la durée de vie du i-ème composant est une variable aléatoire T_i de même loi que T et que ces variables aléatoires T_i sont indépendantes.

Pour tout entier strictement positif n, soit R_n la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si une panne survient à l'instant n et la valeur 0 sinon. Son espérance est notée r_n.

1) a) Calculer l'espérance $\mathrm{E}(T)$ de la variable aléatoire T.

b) Vérifier les égalités $r_1 = \dfrac{1}{3}$ et :$r_2 = \dfrac{7}{9}$.

2) Soit n un entier strictement positif. À l'aide de la formule des probabilités totales, écrire une relation donnant $\mathbf{P}([R_{n+2} = 1])$ en fonction de $\mathbf{P}([R_{n+1} = 1])$ et de $\mathbf{P}([R_n = 1])$ et en déduire l'égalité:

$$r_{n+2} = \frac{1}{3}\,r_{n+1} + \frac{2}{3}\,r_n$$

3) Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $s_n = \dfrac{8\,r_n - 3\,r_{n+1}}{5}$.

Établir, pour tout entier naturel non nul n, les égalités:

$$\begin{cases} 3\,r_{n+1} &= 8\,r_n - 5\,s_n \\ 3\,s_{n+1} &= 10\,r_n - 7\,s_n \end{cases}$$

4) Soit M, A et B les matrices définies par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{3}\,A$.

a) Montrer que la matrice M est inversible et calculer son inverse M^{-1}.

b) Établir l'égalité : $M^{-1} A\, M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

c) Calculer, pour tout entier naturel non nul n, la puissance n-ième de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et exprimer la matrice A^n en fonction de cette matrice et des matrices M et M^{-1}.

d) Pour tout entier naturel n non nul, donner explicitement la matrice A^n puis la matrice B^n en fonction de n.

e) Donner, pour tout entier naturel n non nul, une écriture matricielle des égalités obtenues à la question **B.**3 et en déduire, à l'aide des résultats de la question **B.**4, que la suite $(r_n)_{n>0}$ vérifie:

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times\cdot},\ r_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

f) En déduire la limite de la suite $(r_n)_{n>0}$.

5) Soit n un entier strictement positif et U_n la variable aléatoire désignant le nombre de pannes (et donc de remplacements) survenues jusqu'à l'instant n inclus.

Exprimer la variable aléatoire U_n à l'aide des variables aléatoires R_i, calculer l'espérance $\mathrm{E}(U_n)$ et montrer que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{E}(U_n)}{3n} = \frac{1}{5}$.

Partie 2 : Cas continu

Dans cette partie, T est une variable aléatoire de densité f nulle sur $\mathbb{R}_-^{\times\cdot}$, continue sur $\mathbb{R}_+$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^{\times\cdot}$. Si F est la fonction de répartition de cette variable aléatoire, on appelle *loi de survie* du composant la fonction D définie sur $\mathbb{R}_+$ par:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad D(t) = 1 - F(t) = \mathbf{P}([T > t])$$

Pour tout réel t positif, on appelle *coefficient d'avarie* à l'instant t le nombre $\pi(t)$ défini par :

$$\pi(t) = \frac{f(t)}{D(t)}$$

1. On suppose dans cette question que T suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{2}{3}$.

a) Déterminer alors la loi de survie du composant et donner l'allure de sa courbe représentative en précisant la tangente à l'origine.

b) Établir, pour tout réel t positif, l'égalité $\pi(t) = \dfrac{3}{2}$.

2. On suppose dans cette question que la densité f de la variable aléatoire T est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} t\, e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

a) Vérifier que la fonction f ainsi définie possède les propriétés d'une densité de probabilité.

b) Préciser la densité continue d'une variable aléatoire normale centrée réduite et en déduire les égalités:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty} t^2\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire T.

d) Montrer que la variable aléatoire T^2 suit une loi exponentielle et préciser son paramètre.
En déduire la variance de la variable aléatoire T.

e) Déterminer la loi de survie du composant et donner l'allure de sa courbe représentative en précisant la tangente à l'origine.

f) Calculer, pour tout réel t positif, le coefficient d'avarie $\pi(t)$.

3. On suppose dans cette question qu'il existe une constante α strictement positive telle que l'on a:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \pi(t) = \alpha$$

a) Pour tout réel t positif, on pose : $g(t) = e^{\alpha\, t} D(t)$.
Montrer que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}_+$.

b) En déduire que T suit une loi exponentielle et préciser son paramètre.