CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 2003

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

1. Soit a et b deux réels strictement positifs et A la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que si a et b sont égaux, la matrice A n'est pas inversible.

   (b) Calculer la matrice $A^2 - 2aA$. En déduire que, si a et b sont distincts, la matrice A est inversible et donner la matrice A^{-1}.

   (c) Montrer que les valeurs propres de A sont $a+b$ et $a-b$.

   (d) On pose $\Delta = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice Q, carrée d'ordre 2 à coefficients réels, inversible et dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, vérifiant $A = Q\Delta Q^{-1}$.

   (e) Calculer la matrice Q^{-1} et, à l'aide de la question précédente, calculer la matrice A^n pour tout entier naturel non nul n.

2. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et q le réel $1-p$. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p.

   Pour tout ω de Ω, on désigne par $M(\omega)$ la matrice carrée d'ordre 2 suivante: $\begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$ et on note $S(\omega)$ (respectivement $D(\omega)$) la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de $M(\omega)$ et on définit ainsi deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

(a) Montrer que la probabilité de l'événement $[X = Y]$ est donnée par: $\mathbf{P}([X = Y]) = \dfrac{p}{2-p}$ et en déduire la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega\ ;\ M(\omega) \text{ est inversible}\}$.

(b) Calculer la covariance des variables aléatoires S et D.

(c) Calculer les probabilités $\mathbf{P}([S = 2] \cap [D = 0])$, $\mathbf{P}([S = 2])$ et $\mathbf{P}([D = 0])$.
Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

(d) Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\mathbf{P}([S = n]) = (n-1)p^2q^{n-2}$.

(e) En déduire, lorsque p est égal à $\dfrac{2}{21}$, que la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices $M(\omega)$ possibles est 11.

PROBLÈME

Partie A : Étude d'une fonction

1. (a) On suppose, dans cette question, qu'il existe une fonction f de classe C^1 sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, 1[$, vérifiant pour tout réel x appartenant à $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, l'égalité :

$$x(1-x)f'(x) + (1-x)f(x) = 1$$

Soit h la fonction définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, par: $h(x) = xf(x)$.
Montrer que h est de classe C^1 sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et calculer sa dérivée.
En déduire qu'il existe deux constantes réelles c_1 et c_2 vérifiant

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 0[, & h(x) = -\ln(1-x) + c_1 \\ \forall x \in]0, 1[, & h(x) = -\ln(1-x) + c_2 \end{cases}$$

(b) On définit une fonction f sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, 1[$ par:

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 0[, & f(x) = \dfrac{-\ln(1-x) + c_1}{x} \\ \forall x \in]0, 1[, & f(x) = \dfrac{-\ln(1-x) + c_2}{x} \end{cases}$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes réelles.
Déterminer les constantes c_1 et c_2 pour que la fonction f soit prolongeable par continuité en 0.

2. Dans toute la suite de cette partie, f désigne la fonction définie sur $]-\infty, 1[$ par:

$$\begin{cases} f(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(a) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ puis le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction f .

(b) En déduire que la fonction f est continue en 0, dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.

(c) Montrer que, pour tout x de $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, on a:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-x} - f(x)\right)\frac{1}{x}$$

En utilisant le développement limité de la question précédente, montrer que f est de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$.

3. (a) Étudier le signe de la fonction φ définie sur $]-\infty, 1[$ par: $\varphi(x) = \dfrac{x}{1-x} + \ln(1-x)$.
En déduire les variations de la fonction f

(b) Donner le tableau de variation de la fonction f et l'allure de la représentation graphique de f en précisant les asymptotes, la tangente à l'origine et la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de l'origine.

4. Soit x un réel de l'intervalle $]0,1[$.

(a) Soit h la fonction définie sur $]-\infty,1[$ par: $h(t)=-\ln(1-t)$.
Calculer, pour tout réel t de $]-\infty,1[$, $h'(t)$, $h''(t)$, puis pour tout entier naturel n non nul, $h^{(n)}(t)$.

(b) Justifier, pour tout entier naturel n, l'égalité:

$$h(x)=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{x^k}{k}+\int_0^x .\frac{(x-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}}\,dt$$

(c) Établir, pour tout réel t de l'intervalle $[0,x]$, la double inégalité: $0\leqslant\dfrac{x-t}{1-t}\leqslant x$.
En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la double inégalité:

$$0\leqslant f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k+1}\leqslant x^{n+1}f(x)$$

(d) Justifier l'égalité: $\quad f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$.

Partie B : Étude d'une variable aléatoire à densité

1. Dans cette question f est la fonction définie à la question 2 de la partie I.

(a) Soit f_1 la fonction définie sur $]0,1]$ par : $\begin{cases} f_1(t)=\dfrac{\ln t}{t-1} & \text{si} \quad t\neq 1 \\ f_1(1)=1 \end{cases}$

Justifier la continuité de f_1 sur $]0,1]$ et établir, pour tout réel x de $]0,1[$, l'égalité:

$$\int_0^x .f(t)dt=\int_{1-x}^{1} f_1(t)dt$$

(b) Soit a un réel de l'ntervalle $]0,1[$. Établir pour tout entier naturel n, l'égalité:

$$\int_a^1 t^n\ln t dt=-\frac{a^{n+1}\ln a}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}(1-a^{n+1})$$

En déduire la convergence de l'intégrale $\int\limits_0^1 t^n\ln t dt$ et l'égalité: $\int\limits_0^1 t^n\ln t dt=-\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

(c) Soit a un réel de l'intervalle $]0,1[$ et n un entier naturel, démontrer pour tout t de $[a,1]$, l'égalité

$$\int_a^1 f_1(t)dt+\sum_{k=0}^{n}\int_a^1 t^k\ln t dt=\int_a^1 t^{n+1}f_1(t)dt$$

(d) Montrer que la fonction $t\mapsto t\,f_1(t)$ est prolongeable en une fonction h_1 continue sur $[0,1]$.
En déduire que l'intégrale $\int\limits_0^1 f_1(t)dt$ converge et qu'elle vérifie :

$$\int_0^1 f_1(t)dt=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}+\int_0^1 t^n\,h_1(t)dt$$

(e) On désigne alors par M le maximum sur $[0,1]$ de la fonction h_1.
Établir, pour tout entier naturel n, l'inégalité:

$$0 \leqslant \int_0^1 f_1(t)dt - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{M}{n+1}$$

(f) Justifier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, puis l'égalité: $\int_0^1 f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

2. On donne: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ et on désigne par g la fonction définie sur R par:

$$\begin{cases} g(t) = \dfrac{6}{\pi^2} f(t) & \text{si} \quad t \in [0,1[\\ g(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Vérifier que g est une densité de probabilité.

(b) Soit X une variable aléatoire ayant pour densité g.
Vérifier, pour tout réel x de $]0,1[$, l'égalité $\int_0^x . \ln(1-t)dt = \int_{1-x}^1 \ln t dt$.
Utiliser alors le résultat de la question 1b pour prouver que X possède une espérance et la calculer.

(c) Par une méthode analogue, montrer que l'intégrale $\int_0^1 (t-1)\ln(1-t)dt$ est égale à $\dfrac{1}{4}$.
En déduire que la variable aléatoire X^2 admet une espérance, préciser sa valeur et calculer la variance de la variable aléatoire X.

Partie C : Encadrement d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on désigne par V l'ensemble ouvert défini par:

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}\}$$

1. Soit u la fonction de V dans $\mathbb{R}$: $(x,y) \mapsto u(x,y) = xy^2 + x^2 + y^2 + \dfrac{1}{4}$.

(a) Montrer que la fonction u admet un minimum sur V dont on précisera la valeur, mais n'admet pas de maximum.

(b) Montrer que la fonction u est majorée par $\dfrac{7}{8}$ sur l'ouvert V.

2. Soit F la fonction : $(x,y) \longmapsto F(x,y) = \dfrac{\ln\left(\dfrac{3}{4} - xy^2 - x^2 - y^2\right)}{\dfrac{1}{4} + xy^2 + x^2 + y^2}$.

(a) À l'aide des résultats de la partie I, montrer que F est définie sur l'ouvert V et qu'elle y admet un maximum. Préciser la valeur de ce maximum.

(b) Donner un encadrement de $F(x,y)$ pour tout (x,y) de V.