CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION TECHNOLOGIQUE

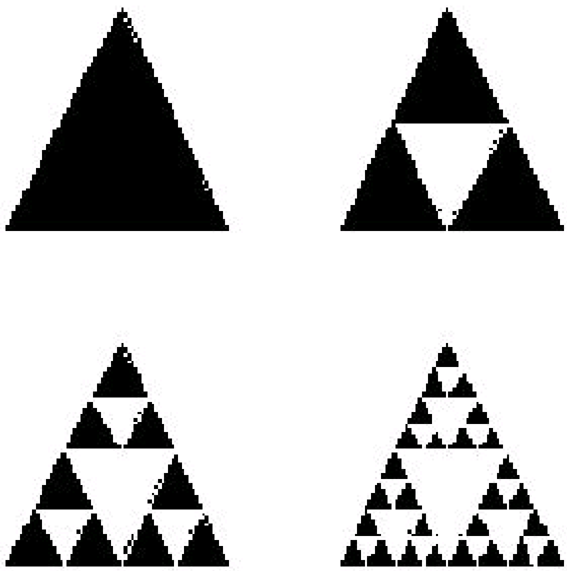
MATHEMATIQUES I

Année 2003

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

On considère un triangle équilatéral $A_0B_0C_0$ de longueur de côté 1, d'aire $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, peint en noir; on désigne respectivement par A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés $[B_0C_0]$, $[A_0C_0]$, $[A_0B_0]$ et on peint en blanc l'intérieur du triangle $A_1B_1C_1$. On effectue ensuite la même opération sur chacun des triangles encore noirs $A_0C_1B_1$, $C_1B_0A_1$, $B_1A_1C_0$ et ainsi de suite pour obtenir les figures suivantes :



Pour tout entier naturel n, soit t_n le nombre de triangles équilatéraux encore noirs avant la $(n+1)$-ième opération, c_n le nombre total de leurs côtés, s_n le nombre total de leurs sommets et a_n la longueur de leur côté. On a donc: $t_0 = 1,\ c_0 = 3,\ s_0 = 3,\ a_0 = 1,\ t_1 = 3,\ c_1 = 9,\ s_1 = 6,\ a_1 = \dfrac{1}{2}$.

1. Expimer a_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

2. Soit n un entier naturel n. Exprimer les nombres $t_{n+1},\ c_{n+1},\ s_{n+1}$ à l'aide des nombres $t_n,\ c_n,\ s_n$ et en déduire l'égalité matricielle:

$$\begin{pmatrix} t_{n+1} \\ c_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} t_n \\ c_n \\ s_n \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad M \text{ est la matrice : } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (a) Calculer M^2 et M^3.
   (b) Montrer qu'il existe une suite de réels $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant, pour tout entier naturel non nul n:

$$M^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & u_n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 3\,u_n + 1$$

   (c) Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, u_n uniquement en fonction de n.

4. Utiliser les résultats de la question précédente pour montrer que, pour tout entier naturel n, on a:

$$\begin{cases} t_n &= 3^n \\ c_n &= 3^{n+1} \\ s_n &= \dfrac{3}{2}(1+3^n) \end{cases}$$

5. Pour tout entier naturel n, on désigne par b_n le nombre de triangles équilatéraux déjà peints en blanc avant la $(n+1)$-ième opération.

   (a) Calculer, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} - b_n$ en fonction de t_n, puis b_{n+1} en fonction uniquement de n.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'égalité:

$$1 + t_n + b_n - c_n + s_n = 2 \quad (relation d'Euler)$$

6. Pour tout entier naturel n, on note p_n la somme des périmètres des triangles encore noirs avant la $(n+1)$-ième opération et S_n la surface déjà peinte en blanc.

   (a) Exprimer p_n en fonction de n, pour tout entier naturel n, et déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$.
   (b) Établir, pour tout entier naturel n l'égalité : $S_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right)$.
   En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$. Ce résultat était-il prévisible ?
   (c) Montrer qu'il existe un réel D que l'on précisera, compris strictement entre 1 et 2 et vérifiant pour tout entier naturel n: $t_n = \left(\dfrac{1}{a_n}\right)^D$.
   La surface noire est connue sous le nom de Joint de Culasse de Sierpinsky; D est appelé sa dimension fractale.

PROBLÈME

Partie I : Expression de l'espérance du chiffre d'affaire

Dans cette partie, n est un entier naturel non nul, N un entier supérieur ou égal à 2, et p un réel strictement compris entre 0 et 1.
Une compagnie aérienne a vendu n billets à cent euros pour le vol 714 qui peut accueillir jusqu'à N passagers. La probabilité pour qu'un acheteur se présente à l'embarquement est p et les comportements des acheteurs sont supposés indépendants les uns des autres.
Un acheteur qui ne se présente pas à l'embarquement est remboursé à 80%, tandis qu'un acheteur qui se présente à l'embarquement mais n'obtient pas de place, le vol étant déjà complet, est remboursé à 200%.
Soit X la variable aléatoire désignant le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement, soit Y la variable aléatoire désignant le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement mais n'obtenant pas de place et soit G la variable aléatoire désignant le montant en centaines d'**euros** du chiffre d'affaire de la compagnie sur le vol considéré.
On suppose ces variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.

2. Préciser, pour tout élément ω de Ω, la valeur de $Y(\omega)$ en fonction de N et de $X(\omega)$, en distinguant les cas $X(\omega) > N$ et $X(\omega) \leqslant N$.

3. Justifier l'égalité : $G = 0,2\,n + 0,8\,X - 2Y$.

4. On suppose, dans cette question seulement, que n est inférieur ou égal à N. Quelle est la seule valeur possible pour Y ? Calculer alors l'espérance $\mathbf{E}(G)$ de la variable aléatoire G.

La compagnie cherche alors à évaluer la probabilité $\mathbf{P}([X \geqslant N])$ afin de déterminer le nombre n permettant d'optimiser son chiffre d'affaire.

Partie II : Approximations dans des cas particuliers

On reprend, dans cette partie les notations et les définitions de la Partie I.

1. On suppose, dans cette question, que p est égal à $0,5$ et on considère la variable aléatoire définie par:

$$X^* = \frac{2X - n}{\sqrt{n}}$$

   (a) Donner l'espérance et la variance de X^*.

   (b) Justifier les égalités :

$$\mathbf{P}([X \geqslant N]) = 1 - \mathbf{P}\left(\left[X \leqslant N - \frac{1}{2}\right]\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\left[X^* \leqslant \frac{2N - 1 - n}{\sqrt{n}}\right]\right)$$

   (c) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on pose: $f(x) = \dfrac{x + 1 - 2N}{\sqrt{x}}$.
   Montrer que la fonction f est croissante.

   (d) On désigne par Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on suppose que N est égal à 320 et on donne: $\Phi\left(-\dfrac{6}{\sqrt{645}}\right) \approx 0,408$; $\Phi\left(-\dfrac{7}{\sqrt{646}}\right) \approx 0,391$.
   En admettant que l'on puisse approcher la loi de X^* par la loi normale centrée réduite, que peut-on en déduire pour $\mathbf{P}([X \geqslant 320])$ si n est inférieur ou égal à 645, puis si n est supérieur ou égal à 646 ?

2. Pour tout entier naturel non nul m, on considère la fonction g_m définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par

$$g_m(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}$$

(a)

(b) Montrer que la fonction dérivée de g_m est définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par: $\quad g'_m(x) = -e^{-x}\,\dfrac{x^m}{m!}$.

(c) Étudier sur $\mathbb{R}_+^\times$ les variations de la fonction $x \mapsto e^{-x}\,x^m$, montrer qu'elle y admet un maximum et en déduire pour tout x de R_+^*, la double inégalité: $\qquad -e^{-m}\,\dfrac{m^m}{m!} \leqslant g'_m(x) \leqslant 0$.

(d) Soit a et b sont deux réels vérifiant $0 < a < b$. En intégrant les trois membres de la double inégalité précédente, montrer que l'on a:

$$0 \leqslant g_m(a) - g_m(b) \leqslant (b-a)e^{-m}\,\frac{m^m}{m!}$$

3. On suppose, dans cette question, que p est égal à $0,99$ et que n est strictement supérieur à N.

(a) Préciser la loi de la variable aléatoire $n - X$.

(b) On supposera, dans les prochains calculs que la loi de la variable aléatoire $n - X$ peut être remplacée par la loi de Poisson de paramètre $0,01\,n$ dont on note F la fonction de répartition.
Montrer que la probabilité $\mathbf{P}([X \geqslant N])$ est alors égale à $F(n-N)$.

(c) Exprimer le nombre $F(n-N)$ à l'aide de la fonction g_m de la question 2 obtenue pour $m = n - N$.

(d) On suppose que N est égal à 300.
Pour tout réel strictement positif α, on note F_α la fonction de répartition de la loi de Poisson de paramètre α et on donne:

$$F_3(2) \approx 0,423\ ; \quad F_3(3) \approx 0,647\ ; \quad e^{-3}\frac{3^3}{3!} \approx 0,224$$

Montrer que, si n est égal à 302, $\mathbf{P}([X \geqslant N])$ est au plus égal à $0,5$ et que, si n est égal à 303, $\mathbf{P}([X \geqslant N])$ est strictement supérieur à $0,6$.