CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES

Année 2004

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

Un fabricant qui doit fournir à ses clients 24000 téléviseurs sur une période de 12 mois, fabrique ces téléviseurs en n séries de q unités chacune, n et q étant des entiers naturels non nul. Dès qu'une série est fabriquée, elle est stockée et sa livraison aux clients s'effectue pendant un intervalle de temps t, t étant un réel strictement positif . La rupture de stock n'étant pas tolérée, l'épuisement du stock d'une série coïncide avec l'arrivée de la série suivante.

Les variables, n, q, t vérifient donc les équations suivantes : $\begin{cases} nq &= 24000 \\ nt &= 12 \end{cases}$

On appelle coût de fabrication par série, C_s, la somme du coût de stockage, qui est proportionnel aux nombres q et t, et du coût de préparation et de remise en ordre des machines, qui est constant : il existe donc deux constantes réelles strictement positives a et b vérifiant l'égalité : $C_s = a\,q\,t + b$.

Le nombre a est le coût de stockage par unité de temps pour une série d'une unité et le nombre b est le coût de préparation et de remise en ordre des machines pour une série.

1. Donner l'expression de C, coût total de fabrication pour les n séries, en fonction de a, b et q.

2. Soit $f_{a,\,b}$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_{a,\,b}(x) = 12ax + 24000\frac{b}{x}$$

Montrer que la fonction $f_{a,\,b}$ admet un minimum en un point q_0 de l'intervalle $]0, +\infty[$.
Préciser la valeur $f_{a,b}(q_0)$ de ce minimum.

3. On suppose, dans cette question seulement, que l'on a : $a = 0,2$ euros et $b = 100$ euros.

   (a) Représenter graphiquement la fonction $f_{a,b}$ (en abscisse, 1 cm pourra représenter 200 unités et, en ordonnée, 1 cm pourra représenter 1000 euros).

   (b) Donner la valeur q_0 de q correspondant au coût total de fabrication minimal, ainsi que ce coût minimal, le nombre de séries n et la valeur de t associés à q_0.

   (c) On suppose que, pour des raisons techniques, le nombre q varie de 1% autour de q_0, c'est à dire entre $0,99\, q_0$ et $1,01\, q_0$.
   Calculer l'intégrale $\int_{990}^{1010} f_{a,b}(x)\, dx$ et en déduire une valeur approchée de la valeur moyenne de la fonction $f_{a,b}$ sur l'intervalle $[0,99\, q_0; 1,01\, q_0]$, en supposant que, pour tout réel x voisin de 0, on peut confondre les nombres $\ln(1+x)$ et x.

4. Calculer le rapport $\dfrac{f_{a,b}(q_0)}{q_0}$
   En déduire que, dans le cas où le nombre a est fixé égal à $0,2$ euros alors que le nombre b varie, le point de coordonnées $(q_0, f_{a,b}(q_0))$ dans un plan muni d'un repère est sur une droite fixe que l'on précisera.
   Tracer cette droite sur le graphique de la question 3a.

5. Calculer le produit $q_0\, f_{a,b}(q_0)$. En déduire que, dans le cas où le nombre b est fixé égal à 100 euros alors que le nombre a varie, le point de coordonnées $(q_0, f_{a,b}(q_0))$ dans un plan muni d'un repère est sur une courbe fixe que l'on précisera. Tracer cette courbe sur le graphique de la question 3a.

PROBLÈME

Dans tout le problème, on considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, c'est-à-dire pour laquelle, à chaque lancer, les apparitions de "pile" et de "face" sont équiprobables.
On admet que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par F_n l'événement "*face apparaît au lancer de rang n*" et par $\overline{F}_n$ l'événement " *pile apparaît au lancer de rang n*".

Partie I : Étude d'un jeu de "pile ou face"

Deux joueurs J et J' s'affrontent dans le jeu dont les règles sont les suivantes :

- le joueur J est gagnant si la configuration "pile, pile, face" apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration "face, pile, pile" n'apparaisse;
- le joueur J' est gagnant si la configuration "face, pile, pile" apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration "pile, pile, face" n'apparaisse;
- si l'un des joueurs est gagnant, l'autre est perdant.

On se propose de démontrer que, dans ce jeu, le joueur J' possède un net avantage sur le joueur J.

1. Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par D_n l'événement "*lors des n premiers lancers n'apparaissent jamais deux piles consécutifs*" et par d_n sa probabilité.

   (a) Justifier les égalités $d_1 = 1$ et $d_2 = \dfrac{3}{4}$

   (b) En considérant les résultats des lancers de rang 1, 2 et 3, calculer d_3.

   (c) À l'aide de la formule des probabilités totales et des événements disjoints F_1 et $\overline{F}_1 \cap F_2$, établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$d_{n+2} = \frac{1}{2} d_{n+1} + \frac{1}{4} d_n.$$

(d) Vérifier pour $n = 1$ et pour $n = 2$, les inégalités : $d_n \leqslant 2\left(\frac{6}{7}\right)^n$.

Montrer que, si n est un entier naturel non nul vérifiant les inégalités

$$d_n \leqslant 2\left(\frac{6}{7}\right)^n \quad \text{et} \quad d_{n+1} \leqslant 2\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1},$$

l'inégalité suivante est vérifiée :

$$d_{n+2} \leqslant 2\left(\frac{6}{7}\right)^{n+2}.$$

En déduire, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3, l'inégalité :

$$d_n \leqslant 2\left(\frac{6}{7}\right)^n.$$

(e) Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k$.

Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, majorée par 12 et en déduire la convergence de cette suite.

(f) Justifier, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$S_{n+2} = \frac{1}{2}S_{n+1} + \frac{1}{4}S_n + \frac{5}{4}$$

En déduire l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k = 5.$$

2. On désigne par T la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang du lancer à l'issue duquel l'un des joueurs est déclaré gagnant, si cela se produit, et la valeur 0 si aucun des joueurs n'est gagnant.
Pour tout entier naturel non nul, l'événement $[T = 0] \cup [T > n]$ est donc réalisé si et seulement si aucune des deux configurations "pile, pile, face" ou "face, face, pile" n'est apparue au cours des n premiers lancers.

(a) Calculer les probabilités des événements $[T = 1]$, $[T = 2]$ et $[T = 3]$.

(b) Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Justifier l'égalité :

$$P([T > n] \cup [T = 0]) = \frac{1}{2^n} + d_n$$

(c) Soit n un entier supérieur ou égal à 4.
Exprimer l'événement $[T = n]$ à l'aide des événements $[T > n-1]$ et $[T > n]$.
En déduire l'égalité :

$$P([T = n]) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$$

(d) Calculer la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P([T = n])$ et montrer que la probabilité que le jeu se termine par la victoire de l'un des joueurs est égale à 1.

3. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on note G_n l'événement " *le joueur J est déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang n*" et g_n la probabilité de G_n.

(a) Calculer g_3 et g_4.

(b) Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Quelle doit être la suite des résultats des n premiers lancers pour que le joueur J soit déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang n?
En déduire l'égalité suivante : $g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(c) Calculer la probabilité que le joueur J soit déclaré gagnant.

(d) En déduire la probabilité que le joueur J' soit déclaré gagnant et conclure.

Partie II : Paradoxe de Walter Penney (1969)

Soit Y la variable aléatoire désignant le rang du dernier "face" quand, pour la première fois apparaît la configuration "pile, pile, face", et prenant la valeur 0 si cette configuration n'apparaît jamais.
Soit Y' la variable aléatoire désignant le rang du dernier "pile" quand, pour la première fois, apparaît la configuration "face, pile, pile", et prenant la valeur 0 si cette configuration n'apparaît jamais.
Par exemple, si les résultats des premiers lancers sont (face, face, pile, face, pile, face, pile, pile, face, ...), la variable aléatoire Y prend la valeur 9 et Y' prend la valeur 8.
Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on note B_n l'événement $\overline{F}_{n-2} \cap \overline{F}_{n-1} \cap F_n$ et B'_n l'événement $F_{n-2} \cap \overline{F}_{n-1} \cap \overline{F}_n$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, les probabilités des événements B_n et B'_n sont égales à $\dfrac{1}{8}$

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
   Comparer les deux événements $[Y \leqslant n]$ et $B_3 \cup B_4 \cup \cdots \cup B_n$.
   Comparer de même les deux événements $[Y' \leqslant n]$ et $B'_3 \cup B'_4 \cup \cdots \cup B'_n$.

3. On pose $u_1 = u'_1 = u_2 = u'_2 = 0$, et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :

$$u_n = P(B_3 \cup B_4 \cup \cdots \cup B_n) \quad \text{et} \quad u'_n = P(B'_3 \cup B'_4 \cup \cdots \cup B'_n)$$

   (a) Vérifier que les événements B_3, B_4 et B_5 sont deux à deux disjoints et que les événements B'_3, B'_4 et B'_5 sont deux à deux disjoints.

   (b) En déduire les valeurs des nombres u_3, u_4 et u_5.

   (c) Montrer que l'on a : $u_3 = u'_3$, $u_4 = u'_4$, $u_5 = u'_5$.

   (d) Vérifier les égalités suivantes :

$$u_3 = u_2 + \frac{1}{8}(1 - u_1) \quad \text{et} \quad u_4 = u_3 + \frac{1}{8}(1 - u_2).$$

4. Soit n un entier supérieur ou égal à 5.

   (a) Que peut-on dire, si n est un entier naturel supérieur ou égal à 4, des événements B_{n-1}, B_n et B_{n+1} d'une part et des événements B'_{n-1}, B'_n et B'_{n+1} d'autre part ?

   (b) Montrer que l'événement $[Y \leqslant n+1]$ est la réunion des deux événements disjoints $[Y \leqslant n]$ et $[Y > n] \cap B_{n+1}$.
   En déduire l'égalité suivante :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).$$

   (c) Établir de même l'égalité $u'_{n+1} = u'_n + \dfrac{1}{8}(1 - u'_{n-2})$.

5. (a) Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel n non nul, les nombres u_n et u'_n sont égaux.

   (b) Que peut-on dire des variables aléatoires Y et Y' ?

C'est le paradoxe de Walter Penney : les temps d'attente des configurations "pile, pile, face" et "face, pile, pile" suivent la même loi alors que le jeu décrit en **Partie I** *est inéquitable.*