ICN 1981

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 muni d'un produit scalaire. Le produit scalaire des vecteurs u et v est noté $u.v$ et la norme du vecteur u est noté $\|u\|$.
On désigne par

- $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de E.
- $F(E)$ l'ensemble des applications de E dans E.
- $T(E)$ l'ensemble des applications f de E dans E qui vérifient :

$$\forall (u,v) \in E \times E, \quad (u-v).\,[f(u) - f(v)] = 0$$

- $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

I - Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère l'application f_a de $F(E)$ qui associe au vecteur $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ le vecteur

$$f_a(v) = (1 + 3x_2 - a_3)e_1 + (2ax_3 - 3x_1)e_2 + (2 + ax_1 - a^2x_2)e_3.$$

1. Déterminer les valeurs de a pour que $f_a \in T(E)$.
2. On prend $a = 2$
   - Démontrer qu'il existe un vecteur w et un endomorphisme g de E tel que $\forall u \in E, \quad f_2(u) = w + g(u)$.
     Donner la matrice de g dans la base B.
     Déterminer $\ker g$ et $\operatorname{Im} g$.
   - Démontrer qu'il existe $(n, i)) \in \ker g \times \operatorname{Im} g$ et un nombre réel α tels que $C = (n, i, \alpha g(i))$ soit une base orthonormée de E.
     Donner la matrice de g dans la base C.

II -
1. Démontrer que $T(E)$ est un sous-espace vectoriel de $F(E)$.
2. soit $f \in \mathcal{L}(E) \cap T(E)$
   - Calculer pour $(u,v) \in E \times E, \quad u.f(u)$ et $u.f(v)v.f(u)$
   - Calculer $e_i.f(e_j) + e_j.f(e_i)$ pour $(i,j) \in \{1,2,3\}^2$.
3. Soit $f \in F(E)$
   - Démontrer que $f \in T(E) \cap \mathcal{L}(E)$ si et seulement si il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que la matrice M de f dans la base B soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$
   - Donner la dimension de $T(E) \cap \mathcal{L}(E)$.
4. Soit $f \in T(E) \cap \mathcal{L}(E)$ avec f différent de la fonction nulle. Soit $B_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base orthonormée de E. On désigne par $M = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_3 & \beta_2 \\ \beta_3 & 0 & -\beta_1 \\ -\beta_2 & \beta_1 & 0 \end{pmatrix}$ les matrices de f dans les bases B et B_1. On pose $R = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3$ et $S = \beta_1\varepsilon_1 + \beta_2\varepsilon_2 + \beta_3\varepsilon_3$

   a)
   - Démontrer que f est de rang 2.
   - Calculer $f(R)$ et $f(S)$.

b) • Démontrer que

$$\forall v \in E, \quad (f \circ f)(v) = (R.v)R - \|R\|^2 v = (S.v)S - \|S\|^2 v$$

• Comparer R et S.

III - 1. Soit $K(E)$ l'ensemble des applications constantes de E dans E

- Démontrer que $K(E)$ est un sous-espace vectoriel de $T(E)$
- Donner la dimension de $K(E)$

2. Soit $f \in T(E)$. On définit l'application φ de $F(E)$ par $\varphi(u) = f(u) - f(0_E)$, où 0_E est le vecteur nul de E.

   a) Démontrer que $\varphi \in T(E)$.

   b) Démontrer que $\forall (u, v) \in E \times E, \quad u.\varphi(u) = 0$
   $\qquad u.\varphi(v) + v.\varphi(u) = 0$

   En déduire que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

   c) Démontrer que $T(E) \cap \mathcal{L}(E)$ et $K(E)$ sont des sous-espaces supplémentaires de $T(E)$.
   Donner la dimension de $T(E)$.

N.B. : La question I est indépendante des questions II et III