# ICN 1986 Option économique et technologique

## 1er exercice

On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que des boules de deux couleurs différentes.
On note $X$ la variable aléatoire "nombre de tirages effectués"

Déterminer la loi de $X$ et calculer son espérance et sa variance

(Tous les résultats seront présentés sous forme de nombres rationnels irréductibles)

## 2ème exercice

Pour $n$ entier strictement positif, on définit

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{2} \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{|\sin t|}{t^2} dt \\ v_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (x^2 - \pi^2 n^2)\, |\sin t|\, dt \end{cases}$$

1. Montrer que $v_n = (2n+1)\pi^2 - 4$.

2. (a) En effectuant le changement de variable $t = \pi - x$ dans l'expression de $u_{n+1}$, montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

   (b) En majorant $|\sin t|$ par 1, montrer que la suite $(u_n)$ est bornée donc convergente.

3. (a) Vérifier que $1 = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\, dt$.

   (b) En déduire l'encadrement suivant :

$$\frac{v_n}{2(n+1)^2\pi^2} \leqslant 1 - u_n \leqslant \frac{v_n}{2n^2\pi^2}$$

   (c) Quelle conclusion peut-on en tirer pour la suite $(u_n)$ ?

# Problème

Soit $n$ un entier $\geqslant 2$. $\mathcal{P}_n$ représente l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant n$. Pour $P \in \mathcal{P}_n$, on note $f(P)$ le polynôme défini par :

$$f(P)(x) = (x-1)P'(x) - 2P(0), \quad \text{où } P' \text{ représente le polynôme dérivé de } P$$

1. (a) Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathcal{P}_n$.

   (b) Donner la matrice $A_n$ de $f$ dans la base canonique $B_n = (1, x, x^2, .., x^n)$ de $\mathcal{P}_n <$

   (c) Démontrer que $f$ est injectif.

   (d) Déterminer $A_n^{-1}$, la matrice inverse de $A_n$.

2. Pour $i$ entier appartenant à $\{1, .., n\}$, on pose $Q_i(x) = \left(\dfrac{i}{2} - 1\right)(1-x)^i - 1$.

(a) Vérifier que $Q_i$ est un vecteur propre de $f$, associé à la valeur propre $\lambda_i = i$.

(b) Montrer qiue si $i$ est pair, $Q_1(x)$ est strictement positif pour tout réel $x$.

(c) Montrer que si $i$ est impair, $i = 2k+1$, $Q_{2k+1}(x) = 0$ possède une unique solution réelle que l'on calculera et que l'on notera $a_k$.
Déterminer $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k$.

3. Soit $B'_n$ la famille de $\mathcal{P}_n$ constituée des polynômes

$$\{x^2, Q_1(x), Q_2(x), ..., Q_n(x)\}$$

(a) Montrer que $B'_n$ est une base de $\mathcal{P}_n$. On notera $P_n$ la matrice de passage de la base $B_n$ à la base $B'_n$.

(b) Donner la matrice $A'_n$ de $f$ dans la base $B'_n$.

4. (a) Démontrer qu'il existe deux suites $(a_p)_{p \geqslant 0}$ et $(b_p)_{p \geqslant 0}$ de $\mathbb{Z}$ telles que

$$\forall p \in \mathbb{N} : (A'_2)^p = \begin{pmatrix} 2^p & 0 & 0 \\ a_p & 1 & 0 \\ b_p & 0 & 2^p \end{pmatrix} \quad \text{(par convention } (A'_2)^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\text{)}$$

Donner les formules de récurrence liant $a_{p+1}$ et $a_p$ d'une part, $b_{p+1}$ et $b_p$ d'autre part.

(b) En déduire les expressions exactes de $a_p$ et $b_p$ (on pourra utiliser $\dfrac{b_p}{2^p}$).

(c) Comment peut-on en déduire pour tout $n \geqslant 2$, les matrices $(A'_n)^p$ et $(A_n)^p$ ?

(d) En remplaçant $p$ par $-p$ dans l'expression de $(A'_2)^p$, vérifier que la matrice obtenue est l'inverse de $(A'_2)^p$, c'est-à-dire $(A_2)^{-p}$.