ICN 1986 Option scientifique

1er exercice

On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que des boules de deux couleurs différentes.
On note X la variable aléatoire "nombre de tirages effectués"

Déterminer la loi de X et calculer son espérance et sa variance
(Tous les résultats seront présentés sous forme de nombres rationnels irréductibles)

2ème exercice

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivables sur I. On se propose de démontrer que $\forall(a,b,c) \in I^3$ vérifiant $a < b < c$, il existe $d \in]a,c[$ tel que :

$$(1) \qquad \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{f"(d)}{2}$$

1. Montrer que la relation (1) est vraie pour toute fonction polynômiale de degré $\leqslant 2$.
2. Soit f quelconque vérifiant les hypothèses initiales.
   Montrer qu'il existe un et un seul polynôme $P(x)$ de degré $\leqslant 2$ qui coïncide avec f en a, b, c.
   Vérifier que $P(x)$ peut s'écrire sous la forme
   $$P(x) = A(x-b)(x-c) + B(x-a)(x-c) + C(x-a)(x-b)$$
   A, B, C étant trois réels à déterminer.
3. Soit $D(x) = f(x) - P(x)$.
   (a) A l'aide du théorème de Rolle appliqué à la fonction D, puis à la fonction D', démontrer l'existence d'un réel $d \in]a,c[$ tel que $D"(d) = 0$
   (b) En déduire la relation (1).

Problème

Notations

- Ξ désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, de base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
- $\mathcal{L}$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E.
- $\mathfrak{M}$ désigne l'algèbre des matrices carrées réelles d'ordre 3.
- $\mathcal{G}$ désigne le groupe multiplicatif des matrices inversibles de $\mathfrak{M}$
- $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble $\{P \in \mathfrak{M} \quad / \quad P^2 = P\}$
- $I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & à \end{pmatrix}$

1. Soit $Q \in \mathcal{G}$, on pose $\mathcal{C}_Q$ l'application de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}$ définie par :

$$\forall M \in \mathfrak{M}, \quad \mathcal{C}_Q(M) = QMQ^{-1}$$

   (a) Montrer que $\mathcal{C}_Q$ est un isomorphisme d'algèbres, c'est-à-dire un isomorphisme d'espaces vectoriels et un isomorphisme d'anneaux.

   (b) Montrer que, $\forall M$ et $M' \in \mathfrak{M}, \quad \mathrm{tr}(MM') = \mathrm{tr}(M'M)$.
   En dédéduire que $\forall M \in \mathfrak{M}, \quad \mathrm{tr}(\mathcal{C}_M) = \mathrm{tr}(M)$.

2. Soit $f \in \mathcal{L}$ de matrice $P \in \mathcal{P} \backslash \{0\}$ dans la base $\mathcal{B}$.

   (a) Montrer que $E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$ (somme directe)

   (b) En déduire qu'il existe une matrice Q de $\mathcal{G}$ et un entier unique $k \in \{1, 2, 3\}$ tels que $P = \mathcal{C}_Q(I_k)$.

3. (a) Soit D la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $D \in \mathcal{P}$.
   Déterminer une matrice Q de $\mathcal{G}$ et l'entier $k \in \{1, 2, 3\}$ tel que $D = \mathcal{C}_Q(I_k)$.

   (b) En utilisant par exemple les matrice D et I_3, démontrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ n'est pas stable pour le produit.

   (c) soit P_1 et $P_2 \in \mathcal{P}$. Démontrer que $P_1 + P_2 \in \mathcal{P}$ si et seulement si $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$.
   En déduire que l'ensemble $\mathcal{P}$ n'est pas stable pour l'addition.

4. Si $P \in \mathcal{P}$, on note $\mathcal{A}(P)$ l'ensemble $\{M \in \mathfrak{M}, \quad / \quad \exists A \in \mathfrak{M}, \quad M = PAP\}$

   (a) Vérifier que $\mathcal{A}(P)$ est un sous-groupe additif de $\mathfrak{M}$.
   Vérifier également que $\mathcal{A}(P)$ est stable par produit.

   (b) Démontrer que $\mathcal{A}(P)$ possède un élément neuttre pour le produit, que l'on précisera.
   En déduire que : $P \neq P' \Leftrightarrow \mathcal{A}(P) \neq \mathcal{A}(P')$

5. (a) Démontrer que $\mathcal{A}(P)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}$.

   (b) Pour $k \in \{1, 2, 3\}$ déterminer explicitement l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{A}(I_k)$ par leurs coefficients $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}}$.
   Donner la dimension de $\mathcal{A}(I_k)$ en fonction de k.
   Pour quels k le produit est-il commutatif dans $\mathcal{A}(I_k)$?

   (c) Si $P \in \mathcal{P} \backslash \{0\}$, montrer l'existence de $k \in \{1, 2, 3\}$ tel que $\mathcal{A}(I_k)$ soit isomorphe à $\mathcal{A}(P)$. En déduire la dimension de $\mathcal{A}(P)$ en fonction de $\mathrm{tr}(P)$.

   (d) Pour quels $P \in \mathcal{P} \backslash \{0\}$ l'anneau $\mathcal{A}(P)$ est-il commutatif ?