ISG 1987 Option générale

EXERCICE

Pour x réel > 0, on pose $F(t) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{(1+x)(t+x)(t^2+x)}$

1. Justifier la convergence de l'intégrale $F(t)$ pour tout $t > 0$.
2. Démontrer que $\forall t > 0, \quad |F(t) - F(1)| \leqslant \dfrac{|1-t|}{t^3} \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{2+t+t^2}{(1+x)^2} dx$
   En déduire que la fonction F est continue en 1.
3. (a) Donner la valeur de $F(1)$.
   (b) Lorsque $t \neq 1$, déterminer trois réels A, B, C dépendant de t tels que :
   $$\forall x > 0, \quad \frac{1}{(1+x)(t+x)(t^2+x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{t+x} + \frac{C}{t^2+x}.$$
   En déduire l'expression de $F(t)$ pour $t \neq 1$ que l'on mettra sous la forme $F(t) = \dfrac{\ln t}{D(t)}$, D désignant un polynôme et ln la fonction logarithme népérien.
4. A l'aide des résultats de 3), retrouver la continuité de la fonction F en 1.

PROBLEME

Préliminaires

On désigne par I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et l'on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$ où a et b désignent deux réels tels que $a + b = 0$

1. Vérifier que 1 est valeur propre de M. Donner la seconde valeur propre α de M.
2. Déterminer 2 matrices R et S telles que $R - S = I$ et $R - \alpha S = M$. Que vaut R^2, RS, SR et S^2 ?
3. Démontrer par récurrence sur $\mathbb{R}$ que $\forall n \geqslant 0, \quad M^n = R + \alpha^n S$

1ere partie

On considère deux urnes U_1 et U_2. Au départ, U_1 contient k_1 boules noires ($k_1 \geqslant 1$) et 1 boule rouge et U_2 contient k_2 boules noires ($k_1 \geqslant 1$). On effectue des tirages successifs avec les trois règles suivantes

(R1) le $n^{ième}$ tirage s'effectue dans l'urne $U_{p(n)}$ où $p(n) = 1$ si n est impair et $p(n) = 2$ si n est pair.

(R2) si l'on tire une boule noire, on la remet dans l'urne

(R3) si l'on tire la boule rouge, on la met dans l'autre urne

Pour $n \geqslant 1$, X_n désigne la variable aléatoire "numéro de l'urne dans laquelle se trouve la boule rouge après le $n^{ième}$ tirage ". On note $u_n = P(X_n = 1)$ et $z_n = P(X_n = 2)$.
Par commodité d'écriture, on posera $u_0 = 1$ et $z_0 = 0$

1. Déterminer 2 matrices carrées réelles d'ordre 2, A et B, telles que

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} z_{2q+1} \\ u_{2q+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} z_{2q} \\ u_{2q} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} z_{2q+2} \\ u_{2q+2} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} z_{2q+1} \\ u_{2q+1} \end{pmatrix}$$

2. (a) Effectuer le produit $C = BA$.
   (b) A l'aide des préliminaires, expliciter C^q pour tout $q \in \mathbb{N}$
   (c) Si $\widetilde{C}$ désigne AB, comment obtenir $\widetilde{C}^q$?

3. (a) Déduire de ce qui précède z_{2q} et u_{2q} pour tout $q \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que les deux suites $(z_{2q})_{q \geqslant 0}$ et $(u_{2q})_{q \geqslant 0}$ possèdent des limites quand $d \to +\infty$, notées respectivement z et u. Vérifier que $z + u = 1$
   (c) Comment choisir k_1 et k_2 pour avoir $z = u$?

4. Expliciter z_{2q+1} et u_{2q+1} et montrer que les 2 suites $(z_{2q+1})_{q \geqslant 0}$ et $(u_{2q+1})_{q \geqslant 0}$ possèdent des limites quand $q \to +\infty$, notées respectivement z' et u'. Comment choisir k_1 et k_2 pour avoir $z' = u'$?

5. Peut-on avoir $z = z'$ et $u = u'$?

2ème partie

On reprend les hypothèses et les notations de la 1ère partie avec la modification suivante : la règle (R1) est remplacée par (R1bis) le numéro de l'urne dans laquelle s'effectue le $n^{ième}$ tirage est désigné au sort à l'aide d'une pièce de monnaie, pile désignant 1 et face désignant 2.

1. Démontrer qu'il existe une matrice carrée réelle d'ordre 2 D telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} z_{n+1} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} z_n \\ u_n \end{pmatrix}$.
   Quelle est la relation simple lie D aux matrices A et B ?

2. Expliciter D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire z_n et u_n.

3. Expliciter $E(X_n)$, l'espérance de X_n, pour tout $n \geqslant 1$.

4. Démontrer que les 2 autres suites $(z_n)_{n \geqslant 0}$ et $(u_n)_{n \geqslant 0}$ possèdent des limites quand $n \to +\infty$, notées respectivement z" et u". Peut-on avoir z" $= u$" ? Dans ce cas, quelle est la limite de $E(X_n)$ quand $n \to +\infty$?