ISG 1987 Option économique et technologique

# EXERCICE

Soit $a$ un réel et $b$ un réel strictement positif. Pour toute fonction $f$ de classe $C^\infty$ sur l'intervalle $\mathcal{J} = [a-b, a+b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, on notera $f^{(n)}$ sa dérivée $n^{ième}$.

1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\times$, et à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\forall x \in \mathcal{J}, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

2. En notant $P_n$ le polynôme $P_n(x) = f(a) + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ et $M_n$ la borne supérieure de l'image de $\mathcal{J}$ par l'application continue, $x \mapsto \left|f^{(n)}(x)\right|$, montrer que :

$$\forall x \in \mathcal{J}, \quad |f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$

3. **Application numérique** :

   On se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale $I = \int\limits_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} e^x |\ln(1+x)|\, dx$. On prend désormais $f(x) = \ln(1+x)$, $a = 0$, $b = \dfrac{1}{4}$ et donc $\mathcal{J} = [-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}]$

   (a) Calculer $f^{(k)}(x)$ et $M_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\times$.

   (b) Trouver un entier $n_0 > 0$ tel que : $\forall x \in \mathcal{J}, \quad |f(x) - P_{n_0}(x)| < 10^{-3}$.
   Expliciter les coefficients de $P_{n_0}$ et étudier son signe sur $\mathcal{J}$.

   (c) Sit $J = \int\limits_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} e^x |P_{n_0}(x)|\, dx$. Donner un majorant de $|I - J|$ sous la forme $\delta.10^{-4}$, où $\delta \in \mathbb{N}^\times$.

   (d) Déterminer une primitive de $e^x P_{n_0}(x)$ sous la forme $e^x Q_{n_0}(x)$, où $Q_{n_0}$ est un polynôme de même degré que $P_{n_0}$, puis donner la valeur de $J$ arrondie à la quatrième décimale.

   (e) En déduire une valeur approchée de $I$ à $10^{-3}$ près.

# Probleme

## Première partie

On désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles. On rappelle que si $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ et $v = (v_n)_{n \geqslant 0}$ sont des éléments de $\mathcal{S}$ et $\lambda$ un réel, $u - v$ désigne la suite $w = (w_n)_{n \geqslant 0}$ telle que $\forall n \geqslant 0, \quad w_n = u_n - v_n$ et $\lambda u$ désigne la suite $x = (x_n)_{n \geqslant 0}$ telle que $\forall n \geqslant 0, \quad x_n = \lambda u_n$. $(\mathcal{S}, +, .)$ est alors un espace vectoriel réel, ce qu'on ne demande pas de vérifier.

1. Soient $a, b, c$ trois réels fixés. On appelle$\mathcal{E}$ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire

$$(E) \quad \forall n \geqslant 0, \quad u_{n+3} + a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0$$

   Démontrer que $\mathcal{E}$ est non vide et est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

2. On note $f$ l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall u = (u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{E}, \quad f(u) = (u_0, u_1, u_2)$$

Démontrer que $f$ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^3$.
Que peut-on en conclure sur la dimension de $\mathcal{E}$ ?

## Deuxième partie

On considère une urne contenant 3 boules de couleurs différentes. On effectue des tirages successifs avec remise. On s'arrête dès qu'on a obtenu 3 boules consécutives de la même couleur. On note $X$ la variable aléatoire "nombre de tirages effectués", à valeurs dans $\mathbb{N}^{\times}$.

1. Soit $p_n = P(X = n)$ et $c_n = P(X \leqslant n)$ pour $n \geqslant 1$.
   Bien entendu, $p_1 = p_2 = c_1 = c_2 = 0$. Que valent $p_3$, $p_4$, $c_3$, $c_4$ ? Plus généralement, que vaut $c_n$ en fonction des $p_k$, $k \leqslant n$ ?

2. Démontrer que, $\forall n \geqslant 1, \quad p_{n+3} = \dfrac{2}{27}(1 - c_n)$. En déduire que $\forall n \geqslant 2, \quad p_{n+3} - p_{n+2} + \dfrac{2}{27}p_n = 0$

3. (a) Vérifier que le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 + \dfrac{2}{27}$ peut se mettre sous la forme $(x - \dfrac{1}{3})Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme du second degré dont on calculera les 2 racines réelles $\lambda_1$ et $\lambda_2$. On notera $\lambda_3 = \dfrac{1}{3}$.

   (b) Démontrer que les 3 suites $(\lambda_1^n)_{n\geqslant 0}$, $(\lambda_2^n)_{n\geqslant 2}$ et $(\lambda_3^n)_{n\geqslant 3}$ sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{S}$ et sont solutions de l'équation :

   $$(E') \quad \forall n \geqslant 0, \quad u_{n+3} - u_{n+2} + \frac{2}{27}u_n = 0$$

   (c) A l'aide des résultats de la première partie, montrer l'existence de 3 constantes réelles $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ telles que :

   $$\forall n \geqslant 2, \quad P_n = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \lambda_i^{n-2}$$

   Donner les valeurs de $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$.

4. (a) Calculer $c_n$ pour tout $n \geqslant 2$. Vérifier que $c_n$ a pour limite 1 quand $n$ tend vers $+\infty$

   (b) Calculer l'espérance de $X$. Vérifier que $E(X) \in \mathbb{N}^{\times}$.