IECS 1987 Option économique Maths I

- I -

On note : $A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A. (1) Trouver $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \beta$ et $(A + \alpha I)(A + \beta I) = 0$.

(2) On pose $M = A + \alpha I$ et $N = A + \beta I$.

a. Déterminer M^2 et N^2 en fonction de N et M. En déduire M^p et N^p pour tout p entier naturel.

b. Soient n et k deux entiers naturels vérifiant $0 < k < n$.
Calculer MN et en déduire $M^k N^{n-k}$. (on remarquera que $k - 1 \geqslant 0$ et $n - k - 1 \geqslant 0$)

(3) a. Exprimer A en fonction de M et N.

b. Comparer MN et NM. En déduire A^n en fonction de n.

B. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \overrightarrow{u} = (x, y, z) & \mapsto & f(\overrightarrow{u}) = (x', y', z') \end{array} \right. \qquad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = -6x + 2y - 2z \\ y' = -2x - y - z \\ z' = 8x - 4y + 2z \end{array} \right.$$

(1) Trouver $\overrightarrow{i} = (a_1, b_1, c_1)$; $\overrightarrow{j} = (a_2, b_2, c_2)$; $\overrightarrow{k} = (a_3, b_3, c_3)$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}) \text{ base de } \mathbb{R}^3 \\ f(\overrightarrow{i}) = -\alpha \overrightarrow{i}, \quad f(\overrightarrow{j}) = -\beta \overrightarrow{j}, \quad f(\overrightarrow{k}) = -\beta \overrightarrow{k} \end{array} \right.$$

où α et β sont les valeurs définies au A.1.

(2) Soient $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les trois suites définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{n+1} = -6r_n - 2s_n + 8t_n \\ s_{n+1} = 2r_n - s_n - 4t_n \\ t_{n+1} = -2r_n - s_n + 2t_n \end{array} \right. \qquad \text{avec } r_0 = -7,\ s_0 = 5,\ t_0 = -3$$

On pose $\left\{ \begin{array}{l} u_n = a_1 r_n + b_1 s_n + c_1 t_n \\ v_n = a_2 r_n + b_2 s_n + c_2 t_n \\ w_n = a_3 r_n + b_3 s_n + c_3 t_n \end{array} \right.$, les nombres a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ étant ceux déterminés au B.1)

a. Exprimer u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} respectivement en fonction de u_n, v_n, w_n et en déduire une expression de u_n, v_n, w_n en fonction de n.

b. Déterminer r_n, s_n, t_n en fonction de chaine de n.

(3) On définit $(r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{pmatrix} r'_n \\ s'_n \\ t'_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Comparer r'_n, s'_n, t'_n et r_n, s_n, t_n.

- II -

On note E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$. Pour f et g éléments de E, on définit la fonction $f \times g$ par la relation :

$$(f \times g)(x) = f(x) \int_0^x g(t)dt + g(x) \int_0^x f(t)dt \quad \text{(pour } x \in \mathbb{R}_+\text{)}$$

A. (1) Soit $f \in E$ et soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, exprimer $\int_0^x f(t)dt$ en fonction de F. En déduire que la fonction

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x f(t)dt \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée.

(2) Montrer que $\forall (f,g) \in E^2, \quad f \times g \in E$.

(3) Montrer que :

$$\forall (f_1, f_2) \in E^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^x (f_1 \times f_2)(t)dt = \left(\int_0^x f_1(t)dt\right)\left(\int_0^x f_2(t)dt\right).$$

(4) Soit $(f,g,h) \in E^3$

a. Comparer $f \times g$ et $g \times f$.

b. Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, exprimer $f \times (\lambda g + \mu h)$ à l'aide de $f \times g$ et de $f \times h$.
Comparer $\lambda(f \times g)$, $(\lambda f) \times g$ et $f \times (\lambda g)$.

c. On note $a = f \times (g \times h)$ et $b = (f \times g) \times h$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, comparer $\int_0^x a(t)dt$ et $\int_0^x b(t)dt$. En déduire que $f \times (g \times h) = (f \times g) \times h$.

B. La question 1) est indépendante de la question 2)

(1) Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x(x+1)f'(x) + f(x) = (x+1)^2 e^x$$

On note $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} \end{cases}$

a. Calculer $(f' \times g)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

b. En utilisant la formule du A.3) montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad f(x) = \frac{(x+1)(e^x - 1)}{x}$$

(2) On rappelle que $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} = e^a.$$

Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^\times$, et on pose :

$$f^{[1]} = f \text{ et, pour } n \geqslant 2, \quad f^{[n]} = f^{[n-1]} \times f.$$

a. Montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \int_0^x f^{[n]}(t)dt = \left(\int_0^x f(t)dt\right)^n \quad \text{(où } x \in \mathbb{R}_+\text{)}.$$

En déduire une expression de $f^{[n]}$ en fonction de $f(x)$ et de $\int_0^x f(t)dt$.

b. On définit h_n (resp. h) sur $\mathbb{R}_+$ par la relation

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{[k]}}{k!}(x) \quad (\text{resp. } h(x) = f(x) e^{\int_0^x f(t)dt}).$$

Donner une expression de $h_n(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $\int\limits_0^x f(t)dt$.
Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n(x)$ et exprimer cette limite en fonction de $h(x)$.
Déterminer $\int\limits_0^x h(t)dt$ en fonction de $\int\limits_0^x f(t)dt$.