IECS 1987 Option générale et économique Maths II

- I -

Un atelier fonctionne avec deux équipes d'ouvriers, une du matin eet une du soir. Chaque jour, on enregistre le nombre d'ouvriers absents et on note par X le nombre d'absences dans l'équipe de jour et par Y le nombre d'absences dans l'équipe du soir. La loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

$X \diagdown Y$	0	1	2	3
0	0,25	0,20	0,05	0
1	0,20	0,10	0,05	0,05
2	0,05	0,02	0,02	0,01

(a) Donner la loi de probabilité de X et celle de Y.

(b) Calculer l'espérance et la variance de X et Y.

(c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

(d) Donner la loi de probabilité de Y sachant que $X \geqslant 1$.

(e) Une absence coûte 100 francs à l'usine. Quelle est la perte journalière moyenne due aux absences ?

- II -

Deux joueurs J_1 et J_2 participent à un jeu de hasard avec les probabilités de gains respectives p_1 et p_2 pour chaque partie.
La probabilité d'une partie nulle est p_0

$$(p_0 > 0, \quad p_1 > 0, \quad p_2 > 0, \quad p_0 + p_1 + p_2 = 1)$$

(a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire N représentant le nombre de parties gagnées par J_1 sur un total de n parties indépendantes jouées ($n \in \mathbb{N}^{\times}$).
Application : Pour $n = 5$ et $p_1 = \dfrac{1}{3}$, calculer la probabilité que J_1 gagne 3 parties.

(b) On suppose qu'un joueur gagne le jeu dès qu'il a gagné deux parties (consécutives ou non) et que le jeu s'arrête alors.
Calculer la probabilité q_n pour que J_1 gagne le jeu en n parties ($n \in \mathbb{N}^{\times}$).

- III -

Au jeu de roulette, une personne ayant misé 1 F sur un nombre compris entre 0 et 36 gagne 35 F si le numéro sur lequel elle a misé sort (sinon, le casino gagne 1 F). Tous les tirages sont équiprobables. Un joueur joue n parties indépendantes, avec $n \in \mathbb{N}^{\times}$ (on fait l'hypothèse simplificatrice qu'il mise 1 F à chaque partie) et on désigne par X_i la variable aléatoire indicatrice de l'évènement (le joueur perd la $i^{ième}$ partie), c'est-à-dire

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le joueur perd l } i^{ième} \text{ partie} \\ 0 & \text{si le joueur gagne la } i^{ième} \text{ partie} \end{cases}$$

K_i est la variable aléatoire :"gain" (positif ou négatif) du casino à la $i^{ième}$ partie ($i = 1, 2, .., n$).
On désigne par T_n la variable aléatoire : nombre de parties perdues par le joueur au cours de n parties et par S_n la variable aléatoire : "gain" du casino après n parties.

(a) Justifier le fait qu'on peut écrire

$$K_i = aX_i + b \quad i = 1, 2, .., n$$

et calculer les valeurs de a et b.
Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire T_n. Calculer son espérance et sa variance en fonction de n.

(b) Exprimer la variable aléatoire S_n en fonction de T_n; calculer l'espérance de S_n et sa variance.

(c) On suppose que le joueur joue $n = 10$ parties.
Quelle est la probabilité que le casino enregistre un gain positif ou nul après ces n parties ?

(d) Comment s'applique ici la loi faible des grands nombres et quelle est votre conclusion ?