IECS 1988 Option économique Maths I

- I -

Soit $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\widehat{M} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$ et $\det M = \alpha\delta - \gamma\beta$.

A - Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, de matrice A dans une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1) Exprimer $A\widehat{A}$ et $\widehat{A}A$ en fonction de I_2 et de $\det A$.
2) Montrer que A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.
Lorsque A est inversible, exprimer A^{-1} en fonction de $\widehat{A}$ et de $\det A$.
3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est une valeur propre de f si et seulement $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$.
4) Déterminer si f est diagonalisable dans les cas suivants :

$$(a) : A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b) : A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \qquad (c) : A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

B - Soient les éléments de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} c_3 & c_4 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} \\ A' &= \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 \\ b'_1 & b'_2 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} a'_3 & a'_4 \\ b'_3 & b'_4 \end{pmatrix}, \quad C' = \begin{pmatrix} c'_1 & c'_2 \\ d'_1 & d'_2 \end{pmatrix}, \quad D' = \begin{pmatrix} c'_3 & c'_4 \\ d'_3 & d'_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On note sous forme abrégée les éléments de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix}, \quad 0_4 = \begin{pmatrix} 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, par exemple,

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer, en effectuant les produits dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ ou dans $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$, que $MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$
2) On suppose dans cette question que $\begin{pmatrix} A' & 0_2 \\ C' & D' \end{pmatrix}$ est inversible.
   (a) Montrer que $D' \neq 0_2$.
   (b) Calculer $\begin{pmatrix} A' & 0_2 \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & \widehat{D'} \end{pmatrix}$ et en déduire que D' est inversible.
3) On suppose dans cette question que A' et D' sont inversibles.
   (a) Calculer $\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0_2 & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^{-1} & -A'^{-1}B'D'^{-1} \\ 0_2 & D'^{-1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A'^{-1} & -A'^{-1}B'D'^{-1} \\ 0_2 & D'^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0_2 & D' \end{pmatrix}$

(b) Calculer $\begin{pmatrix} A' & 0_2 \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^{-1} & 0_2 \\ -D'^{-1}C'A'^{-1} & D'^{-1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A'^{-1} & 0_2 \\ -D'^{-1}C'A'^{-1} & D'^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & 0_2 \\ C' & D' \end{pmatrix}$.

(c) En déduire que les matrices $\begin{pmatrix} A' & 0_2 \\ C' & D' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0_2 & D' \end{pmatrix}$ sont inversibles et indiquer leurs inverses.

4) On suppose dans cette question que A est inversible

(a) Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & -A^{-1}B \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix}$ et montrer que si $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ est inversible alors $\begin{pmatrix} A & 0_2 \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$ est inversible, puis que $D - CA^{-1}B$ est inversible.

(b) Calculer $\begin{pmatrix} A & 0_2 \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & -A^{-1}B \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix}$. Montrer ensuite que si $D - CA^{-1}B$ est inversible alors M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de $\begin{pmatrix} A & 0_2 \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}^{-1}$ et de $\begin{pmatrix} I_2 & -A^{-1}B \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix}^{-1}$ puis de A^{-1}, B, C et de $(D - CA^{-1}B)^{-1}$.

- II -

Soient $n \in \mathbb{N}^\times$, $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ et $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $a_1 < a_2 < ... < a_n$. On considère

$$P : x \mapsto P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) \quad \text{et} \quad Q : x \mapsto Q(x) = P(x) + \lambda P'(x).$$

Soient $f : x \mapsto f(x) = 1 + \lambda \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ et $g : x \mapsto g(x) = \ln |P(x)|$.

A - On suppose dans cette partie que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x+3)(x-2)(x-5)$ et qu'en outre $\lambda \in \mathbb{R}_+^\times$.

1) (a) Exprimer, quand c'est possible, $g(x)$ en fonction de $\ln |x+3|$, $\ln |x-2|$ et $\ln |x-5|$.
(b) Etudier les variations de g et ses branches infinies.

2) Tracer C, courbe représentative de g dans un repère orthonormé (unité graphique : 1 cm)

3) (a) Exprimer, quand c'est possible, $f(x)$ en fonction de $\dfrac{1}{x+3}$, $\dfrac{1}{x-2}$ et $\dfrac{1}{x-5}$.
(b) Etudier les variations et les branches infinies de f.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement 3 solutions, que l'on placera par rapport à -3; 2 et 5.

5) (a) En déduire que le polynôme Q possède au moins 3 racines distinctes.
(b) Montrer que Q possède exactement 3 racines.

B - On considère maintenant le cas général : $\lambda \in \mathbb{R}^\times$, non nécessairement positif, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n).$$

1) (a) Exprimer, quand c'est possible, $g(x)$ en fonction de $\ln |x - a_1|$, $\ln |x - a_2|$, ..., $\ln |x - a_n|$.
(b) En déduire une expression de f en fonction de λ et de g'.

2) Indiquer, suivant le signe de λ, le tableau de variations de f et ses branches infinies.

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement n solutions distinctes dont on précisera, suivant le signe de λ, la position par rapport aux a_i $(i = 1, 2, .., n)$

4) (a) Montrer que le polynôme Q possède au moins n racines.
(b) Montrer que Q peut s'écrire sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \quad \text{avec } x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j.$$

5) En déduire que le polynôme $R = P + 2\lambda P' + \lambda^2 P"$ admet exactement n racines distinctes.