IECS 1988 Option générale Maths I

Problème I

1. (a) Montrer que, pour tout a réel,
$$e^{\alpha} = 1 + \alpha + \int_0^{\alpha} (\alpha - t)e^t dt.$$
   (b) On suppose que α appartient à l'intervalle $[-2, 2]$; montrer qu'alors : $0 \leqslant \int_0^{\alpha} (\alpha - t)e^t dt \leqslant \frac{1}{2}\alpha^2 e^{\alpha}$.
   (on pourra noter $f_1(\alpha) = \int_0^{\alpha} (\alpha - t)e^t dt$).

   N.B. : la question 2 étant plus délicate, on pourra l'admettre dans la suite du problème

2. On définit, pour x réel, $u(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.
   Former, sans calculer les intégrales, $\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$.
   En appliquant le 1) à $\alpha = -h(1 + t^2)$ avec $|h| < 1$ et $t \in [0, 1]$, montrer que u est dérivable et que $u'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt$

3. On pose, pour x réel, $v(x) = u(x^2)$ et $w(x) = \left[\int_0^x e^{-t^2} dt\right]^2$.
   (a) Montrer que v et w sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad v'(x) = -w'(x)$.
   (c) Calculer $v(0) + w(0)$.

4. (a) Que vaut $\lim_{\alpha \to +\infty} \alpha e^{-\alpha}$? En déduire qu'il existe un réel A (qu'on ne cherchera pas à déterminer) tel que :
$$\alpha > A \Rightarrow 0 < e^{-\alpha} < \frac{1}{\alpha}.$$
   (b) On suppose que $x > A$; montrer que $0 \leqslant u(x) \leqslant \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$. En déduire $\lim_{x \to +\infty} u(x)$ puis $\lim_{x \to +\infty} v(x)$.

5. Soit $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Déduire de ce qui précède l'existence de I et sa valeur.

Problème II

Soit $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients réels. On dit que la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si les quatre suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limites respectives, lorsque n tend vers $+\infty$, a, b, c et d. On rappelle que, pour tout x réel,
$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

Pour toute matrice A de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, on notera $\exp A$, la matrice limite, si elle existe, de la matrice $A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$.
(A^0 désignant la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

I - Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est semblable à une matrice diagonale Δ que l'on déterminera.
2) Montrer que $\exp \Delta$ existe et donner son expression.
3) Montrer que, si une suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ tend vers M et si B et B' sont deux matrices fixées de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, les matrices $(M_nB)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(BM_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limites respectives MB et $B'M$.
4) En déduire que 2) et 3) que $\exp A$ existe et calculer son expression
5) Soit m un entier naturel. Montrer que $\exp(mA)$ existe et que $\exp(mA) = (\exp A)^m$.

II - 1) Montrer que toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ vérifie $M^2 - (a+d)M + (ad-bc)I = 0$.
M est dite nilpotente s'il existe un entier naturel k tel que $M^k = 0$.

2) On suppose M nilpotente. On veut montrer que $M^2 = 0$. Soit k le plus petit entier tel que $M^k = 0$.
   (a) Conclure dans l'hypothèse où $k = 1$.
   (b) Si $k \geqslant 2$, montrer, en multipliant l'égalité du 1) par des puissances bien choisies de M, que $ad - bc$, puis que $a + d = 0$. Conclure.
3) Soient M et M' deux matrices nilpotentes, telles que $MM' = M'M$.
   (a) Montrer, en calculant $(M + M')^3$, que $M + M'$ est nilpotente.
   (b) Montrer que $\exp M$, $\exp M'$, $\exp(M+M')$ sont bien définies et que $\exp(M+M') = (\exp M)(\exp M')$.