IECS 1989 Option économique

EXERCICE I

A - Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathbb{R}$. On pose

$$s_n(u) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^k = 1 - u + u^2 + \cdots + (-1)^n u^n.$$

et

$$S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{u^{k+1}}{k+1} = u - \frac{u^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1}.$$

1) (a) Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}, \quad \frac{1}{1+t} = s_n(t) + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$$

(b) Exprimer pour $u \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$ $S_n'(i)$ en fonction de $s_n(u)$ et en déduire que

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) = S_n(x) + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$$

2) On fixe $x \in [0,1]$. Justifier le fait que pour $t \in [0,x]$, on a $\frac{1}{1+x} \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1$ et montrer que

$$\frac{x^{n+2}}{(1+x)(n+2)} \leqslant |\ln(1+x) - S_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+2}}{n+2}.$$

En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x) = \ln(1+x)$.

3) On fixe maintenant $x \in]-1, 0[$.

(a) Montrer que

$$(-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt = -\int_0^{-x} \frac{u^{n+1}}{1-u} du.$$

(b) Soit g la fonction définie sur $[0,1[$ par la relation $g(u) = \frac{1}{1-u}$. Justifier le fait que pour $u \in [0, -x]$, on a $g(0) \leqslant g(u) \leqslant g(-x)$ et montrer que :

$$\frac{(-x)^{n+2}}{n+2} \leqslant |\ln(1+x) - S_n(x)| \leqslant \frac{(-x)^{n+2}}{(1+x)(n+2)}.$$

(c) Montrer que pour $x \in]-1, 0[$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x) = \ln(1+x)$.

4) Afin de calculer une valeur approchée de $\ln 2$, on envisage à priori de calculer $S_n(1)$ pour n assez grand. Quelle valeur minimale de n faudra-t-il considérer si

$$\left| \ln 2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| < 10^{-6} \ ?$$

(on pourra utiliser le 2))

5) On décide de chercher des formules nécessitant le calcul d'un nombre moins élevé de termes.

(a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\ln(1+x) - \ln(1-y) = \ln 2 \Leftrightarrow x + 2y = 1 \text{ et } x > -1.$$

(b) Soit $q \in]0,1]$ un réel fixé et soit h_q la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par la relation $h_q(t) = \dfrac{q^t}{t}$. Montrer que h_q décroit strictement sur $\mathbb{R}_+^\times$.

Détermminer $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geqslant N \Rightarrow \frac{5(\frac{1}{3})^{n+2}}{2(n+2)} < 4.10^{-8}.$$

Donner des valeurs décimales approchant $S_N(\frac{1}{3})$ et $S_N(-\frac{1}{3})$ à 10^{-7} au plus près (On négligera les erreurs d'arrondi de la calculatrice). En déduire une valeur décimale approchant $\ln 2$ à $2,5.10^{-7}$ près.

B - Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \ln 2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

1) Déduire du **A-**2) que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n \geqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n-2}\right)$.

2) (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \geqslant \ln(1+x)$.

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n \geqslant \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{n+3}{2}\right)$ et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

3) (a) A l'aide des **A-**1)(a) et (b), montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \int_0^1 \frac{-t}{1+t}\left[\frac{1+(-1)^n t^{n-1}}{1+t}\right] dt$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \dfrac{t^{n+2}}{(1+t)^2} dt$.

Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leqslant \dfrac{1}{n+3}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

4) (a) Soient $I = \int_0^1 \dfrac{t}{(1+t)^2} dt$ et $J = \int_0^1 \dfrac{dt}{(1+t)^2}$.
Calculer J, $I+J$, I.

(b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

EXERCICE II

On considère les matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 - Vérifier la relation $A^2 - 5A + 6I = 0_3$

2 - En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

3 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2, \quad A^n = \alpha_n A + \beta_n I$.
(On déterminera une relation de récurrence exprimant α_{n+1} et β_{n+1} en fonction de α_n et β_n et on donnera les valeurs de α_1 et de α_0).

4 - Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \alpha_{n+1} - 2\alpha_n$ et $v_n = \alpha_{n+1} - 3\alpha_n$.
Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques et en déduire α_n en fonction de n.

5 - Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de n.

EXERCICE III

Un joueur joue avec deux dés équilibrés

$$\text{sur le dé n°1} \quad \begin{cases} \text{3 faces portent l'inscription +10} \\ \text{2 faces portent l'inscription -30} \\ \text{1 face porte l'inscription +120} \end{cases}$$

$$\text{sur le dé n°2} \quad \begin{cases} \text{1 face porte l'inscription +10} \\ \text{3 faces portent l'inscription -80} \\ \text{2 faces portent l'inscription +120} \end{cases}$$

Quand le joueur joue avec l'un des dés, la somme indiquée sur la face tirée (un "gain" de -80 F signifiant une perte de 80 F)
On note X (respectivement Y) la variable aléatoire : gain en jouant avec le dé n°1 (respectivement n°2).

1 - a) Déterminer les lois de probabilité de X et de Y.
  b) Calculer $P(X > 0)$, $E(X)$ et $V(X)$.
  c) Calculer $P(Y > 0)$, $E(Y)$ et $V(Y)$.

Dans les question qui suivent, le joueur joue une succession de coups en adoptant la règle suivante :

- S'il gagne de l'argent à un coup, il joue celui d'après avec le dé n°2,
- S'il perd de l'argent à un coup, il joue celui d'après avec le dé n°1.

Le premier coup est joué avec le numéro 1.

2 - On note A_n l'évènement : "gagner l'argent au $n^{ième}$ coup ", pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$.

  a) Calculer $p(A_1)$.
  b) Calculer $p(A_2)$
  c) Trouver une relation entre $p(A_{n+1})$ et $p(A_n)$. En déduire l'expression de $p(A_n)$ en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p(A_n)$.

3 - Au $2^{ème}$ coup, le joueur gagne 120 F. Déterminer la probabilité α_2 qu'il ait gagné cette somme en jouant avec dé n°2.

4 - Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

  a) Au $n^{ième}$ coup, le joueur gagne 120 F. Déterminer la probabilité α_n qu'il ait gagné cette somme en jouant avec le dé n°2.
  b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.