IECS 1989 Option générale

Problème I

On note $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4 à coefficients réels, $GL_4(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ formée des matrices inversibles et I la matrice unité d'ordre 4.
On rappelle que l'usage des déterminants est hors-programme

- I -

Soit $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice inverse de A_1. On justifiera l'existence de cette inverse (Ce calcul étant utilsé par la suite, il est à effectuer soigneusement).

2. Soit OL_4 l'ensemble des opérations élémentaires sur les lignes des matrices de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$. On rappelle que OL_4 est formé des opérations du type :

$$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad L_i \leftarrow \alpha L_i \quad (\alpha \in \mathbb{R}^\times) \quad L_i \leftrightarrow L_j$$

   Montrer que toute opération r de OL_4 admet une inverse dans OL_4 pour la composition des opérations (c'est-à-dire qu'il existe r' de OL_4 telle que : $\forall M \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R}), \quad (r \circ r')(M) = (r' \circ r)(M) = M$). On note r^{-1} cette inverse.

3. (a) Soit r un élément de OL_4 et M une matrice de $GL_4(\mathbb{R})$.
   Montrer que $r(M)$ appartient à $GL_4(\mathbb{R})$ et que $[r(M)]^{-1} = M^{-1}r^{-1}(I)$.

   (b) En déduire l'inverse de la matrice A_2 :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 5 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- II -

Soit L la matrice ligne $L = (l_1, l_2, l_3, l_4)$ et C la matrice colonne $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$; $l_1, l_2, l_3, l_4, c_1, c_2, c_3, c_4$ étant huit réels quelconques.
On suppose que L et C toutes deux non nulle.

1. Quelles sont les dimensions de la matrice LC ? De la matrice CL ? On identifiera dans la suite LC à un réel.

2. (a) Montrer que si $LC = -1$, la matrice $I + CL$ n'est pas inversible. (On pourra calculer $(I + CL)C$).

   (b) Montrer que si $LC + 1 \neq 0$ alors $I + CL$ est inversible et il existe un réel k tel que $(I + CL)^{-1} = I + kCL$.

3. Soit M une matrice de $GL_4(\mathbb{R})$ et $N = M + CL$.
   En remarquant que $N = M(I + M^{-1}CL)$, trouver une condition nécessaire et suffisante sur le réel $LM^{-1}C$ pour que N soit inversible et montrer que sous cette condition, $N^{-1} = M^{-1} - \dfrac{1}{1 + LM^{-1}C} CLM^{-1}$

4. Applications :

   (a) Soit $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A_3 - A_1$ peut s'écrire simplement sous la forme CL; en déduire que A_3 est inversible et calculer A_3^{-1}.

   (b) A quelle condition sur (a, b) la matrice $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & a & b & 1 \end{pmatrix}$ est-elle non inversible ?

Problème II

On note E l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, à dérivées continues sur $\mathbb{R}$, et telles que $f(0) = f(1) = 0$.

Dans tout le problème, f désigne une fonction de E.

1. Donner un équivalent de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sin \pi t}$

   (a) en $t_0 = 0$

   (b) en $t_0 = 1$

2. (a) Montrer que l'intégrale $I(f) = \int_0^1 \dfrac{\cos \pi t}{\sin \pi t} f(t) f'(t) dt$ converge.

   (b) A l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera soigneusement, montrer que $I(f) = \dfrac{\pi}{2} \int_0^1 \dfrac{f^2(t)}{\sin^2(\pi t)} dt$ (où $f^2(t)$ désigne $(f(t))^2$).

3. En considérant $S(f) = \int_0^1 \left(\pi \dfrac{\cos \pi t}{\sin \pi t} f(t) - f'(t) \right)^2 dt$, montrer l'inégalité

$$(i) \qquad \int_0^1 f'^2(t) dt \geqslant \pi^2 \int_0^1 f^2(t) dt.$$

4. (a) Montrer que le cas d'égalité dans l'inégalité (i) est obtenu si et seulement si :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \pi(\cos \pi t) f(t) = f'(t) \sin \pi t.$$

   (b) En déduire l'ensemble des fonctions de E qui réalisent le cas d'égalité dans (i). On pourra utiliser la fonction auxiliaire définie sur $]0, 1[$ par $\lambda(t) = \dfrac{f(t)}{\sin \pi t}$ (on n'indiquera bien sûr, que les valeurs de f sur $[0, 1]$)

EXERCICE

On suppose que la variable aléatoire N_t ($t > 0$), désignant le nombre de voitures arrivant au péage d'une autoroute pendant un intervalle de temps de longueur t, suit une loi de Poisson de paramètre $l = \lambda t$, λ étant un nombre strictement positif. On supposde que la loi de N_t ne dépend que de la longueur t et non des instants de début et de fin de l'intervalle.
On définit la variable aléatoire Y de la façon suivante : on considère un instant déterminé, choisi comme origine des temps; Y est le premier instant strictement positif où arrive une voiture au péage.

1. Donner la formule de la probabilité de l'évènement $(N_t = k)$, $k = 0, 1, 2, ...$
2. Préciser l'espérance et la variance de la variable aléatoire N_t.
3. On veut déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.
   (a) Quelle est la signification de l'évènement $(Y > y)$, $y > 0$?
   (b) Calculer la probabilité $P(Y > y)$. En déduire la fonction de répartition $F_Y(y) = P(Y \leqslant y)$.
   (c) Déterminer une fonction de densité $f(y)$ de la loi de probabilité de Y.
4. Calculer l'espérance mathématique de Y.