IECS 1989 Option technologique

Les parties **IV**. A et **IV**. B peuvent être traitées séparément.
Elles utilisent les résultats des parties **I**, **II** et **III** qui sont indépendantes

Partie I

On considère les matrices

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \text{où } x, y, z, t \text{ sont des nombres réels.}$$

1. Résoudre le système
$$S_\lambda : AX = \lambda X$$
d'inconnue X, où λ est un paramètre réel.
On note λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$ les valeurs de λ pour lesquelles le système (S_λ) admet une infinité de solutions.

2. On considère la matrice carrée P d'ordre 4 telle que :
   (a) la dernière ligne de P est $(1\ 1\ 1\ 1)$;
   (b) pour $i = 1, 2, 3, 4$ la $i^{ième}$ colonne de P est solution du système (S_λ).

   Calculer P^2, et en déduire l'inverse P^{-1} de la matrice P.

3. Calculer la matrice $P^{-1}AP$ et en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^\times$ (on écrira clairement les seize coefficients de A^n).

Partie II

Soit f la fonction numérique $f : x \mapsto \dfrac{4^{10}.5^x - 5^{10}.4^x}{4^{10}.(5^x - 4^x)}$ et (C) la courbe représentative de f.

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2. Calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$ et en déduire la nature des branches infinies de (C).

3. Etudier les variations de f.

4. Tracer la courbe (C) dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphique : 1 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonée)
On précisera la valeur du réel a tel que $f(a) = 0$, et une valeur approchée à 10^{-1} près du réel b tel que $f(b) = \dfrac{1}{2}$.

Partie III

Soit $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite numérique vérifiant pour $k \geqslant 1$ la relation

$$(R) \qquad 9u_k = 5u_{k-1} + 4u_{k+1}.$$

Pour $k \geqslant 1$, on pose $v_k = u_k - u_{k-1}$ et $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} v_i$.

1. Exprimer S_k en fonction de u_0 et u_k.
2. Montrer que (v_k) est une suite géométrique dont on précisera la raison q.
   En déduire l'expression de S_k en fonction de v_1 et k.
3. Déduire des question 1) et 2) l'expression de u_k en fonction de u_0, u_1 et k.
4. On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation (R), telle que :

   $$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_N = 0 \text{ pour un entier } N \geqslant 1.$$

   (a) Utiliser la relation obtenue dans la question 3) pour calculer v_1 puis u_{10} en fonction de N.

   (b) Vérifier que $u_{10} = f(N)$ où f est la fonction étudiée dans la partie **II**

Partie IV

On s'intéresse à des jeux opposants deux joueurs J et J'. Ils disposent de N jetons ($N \geqslant 1$) et d'un dé équilibré possédant deux faces blanches, deux faces vertes et deux faces rouges.

A - On prend $N = 3$ et on suppose qu'un jeton est blanc, un vert et un rouge. Le jeu est le suivant : on répartit d'abord au hasard les trois jetons entre les joueurs J et J', puis à chaque coup, on lance le dé et on observe la couleur de la face supérieure : le joueur possédant le jeton de cette couleur le cède alors à son adversaire. Pour $n \geqslant 0$, on appelle X_n la variable aléatoire égale au nombre de jetons que possède J à l'issue du $n^{ième}$ coup, X_0 représentant le nombre de jetons que possède J après la répartition initiale.

1) Calculer, pour $i = 1, 2, 3, 4$ les probabilités conditionnelles p_i, q_i, r_i, s_i suivantes :

$$\begin{aligned} p_i &= P(X_{n+1} = i-1 / X_n = 0) \\ q_i &= P(X_{n+1} = i-1 / X_n = 1) \\ r_i &= P(X_{n+1} = i-1 / X_n = 2) \\ s_i &= P(X_{n+1} = i-1 / X_n = 3) \end{aligned}$$

2) On désigne par M la matrice carrée d'ordre 4 dont la $i^{ième}$ ligne est (p_i, q_i, r_i, s_i) et par C_n la matrice colonne dont la $i^{ième}$ ligne est la probabilité $p(X_n = i-1)$, pour $i = 1, 2, 3, 4$.
Montrer que $C_{n+1} = MC_n$.

3) On suppose dans cette question que X_0 est distribué suivant une loi binômiale $\mathcal{B}(3, \frac{1}{2})$.
Déterminer la loi de probabilité de X_1.
Que peut-on en conclure concernant la loi de X_n pour $n \geqslant 1$?

4) On suppose dans cette question que X_0 est distribué suivant une loi uniforme : $p(X_0 = i-1) = \dfrac{1}{4}$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

   (a) Utiliser la question 1)(3) pour déterminer la loi de probabilité de X_n (on pourra distinguer le cas n pair et le cas n impair).
   Préciser les lois de X_1, X_2, X_3.

   (b) Quelle est le nombre moyen $E(X_n)$ de jetons pour que le joueur J peut espérer avoir après le $n^{ième}$ coup ?

B - On suppose $N \geqslant 10$. La couleur des jetons n'intervient plus.
Le jeu est maintenant le suivant : pour commencer, le joueur J possède k jetons $(0 \leqslant k \leqslant N)$ et le joueur J' les $(N-k)$ autres jetons. A chaque coup, on lance le dé.

- Si la face supérieure est verte, le joueur J reçoit un jeton de J'.
- Si la face supérieure est rouge, le joueur J donne un jeton à J'.
- Si la face supérieure est blanche, on relance le dé : si la face verte apparait à ce second lancer, J reçoit un jeton de J', sinon J donne un jeton à J'.

Le jeu s'arrête dès que J n'a pas de jetons (on dira que J perd) ou bien que J' n'a pas de jetons (on dira que J gagne).

1) Quelle est la probabilité p_k de l'évènement $(X_1 = k+1)$ lorsque $k < N$?
2) On appelle p la probabilité de l'évènement E : "le joueur J perd"
   (a) Préciser la valeur de p_0 et p_N.
   (b) Remarquer que pour $k < N$
   $$p(E/X_1 = k+1) = p_{k+1} \quad \text{et} \quad p(E/X_1 = k-1) = p_{k-1};$$
   en déduire que : $p_k = (1-p)p_{k-1} + p.p_{k+1}$.
3) On suppose dorénavant $k = 10$.
   (a) Utiliser la question **III.**4) pour exprimer p_{10} en fonction de N.
   (b) Pour quelles valeurs de N, le joueur J a-t-il une probabilité de perdre inférieure à 0,5 ?
   (c) Quel est le nombre maximal de jetons que peut posséder initialement le joueur J' pour que la probabilité que J perde soit inférieure à 0,5 ?