IECS 1990 Option économique

EXERCICE I

On note E l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré au plus 3.

A - Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1) Etudier les variations de f et préciser ses branches infinies.
2) Déterminer la concavité et les éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède trois racines réelles distinctes, qu'on note α, β et γ avec $\alpha < \beta < \gamma$.
Placer α, β et γ par rapport aux nombres $-1; 0; 1; 2; 3$.
4) Tracer $\mathcal{C}_f$ (unités graphiques : 2 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée)

B - 1) Soit $P \in E$. Montrer que la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = -P(x)P(-x)$$

est une fonction paire.
Que peut-on conclure sur les coefficients de Q ?

2) Montrer que $\forall P \in E, \quad \exists \widehat{P} \in E, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad -P(x)P(-x) = \widehat{P}(x^2)$.

3) On considère la suite d'éléments de E définie par

$$P_0 = f \quad \text{et, pour } n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = \widehat{P_n}$$

(a) Déterminer P_1, P_2, P_3 et P_4.
Les candidats sont invités à tenir compte du B-1) et à utiliser, si nécessaire, leur calculatrice

(b) On note P_n sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = x^3 - a_n x^2 + b_n x + c_n \text{ avec } (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3.$$

Soit a la racine $16^{ième}$ de a_4. Calculer $f(a)$ à la précision de la calculatrice.
On se propose d'expliquer le phénomène précédent.

4) (a) Montrer que si α_n, β_n et γ_n sont les racines de P_n, alors P_{n+1} admet α_n^2, β_n^2 et γ_n^2 comme racines.
(b) Si α_n, β_n et γ_n sont les racines de P_n, exprimer a_n en fonction de α_n, β_n et γ_n.

5) On déduit que **B-4**) que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \alpha^{2^n} + \beta^{2^n} + \gamma^{2^n}$.
Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n)^{\frac{1}{2^n}} = \gamma$

EXERCICE II

On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ déterminé par sa matrice A dans $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ 0 & \beta & c \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \text{où } \alpha, \beta \text{ et } \gamma \text{ ne sont pas tous égaux.}$$

A - On veut montrer qu'on peut se ramener au cas où $\alpha \neq \gamma$, et pour ce faire on suppose $\alpha = \gamma$.

1) On supose dans cette sous-question qu'on a aussi $c = 0$. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B}' = (e_1, e_3, e_2)$.
2) On suppose dans cette sous-question, qu'on a $c \neq 0$. On pose $e_2' = ce_2 + (\alpha - \beta)e_3$. Montrer que $\mathcal{B}" = (e_1, e_2', e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Exprimer $f(e_2')$ et $f(e_3)$ en fonction de e_1, e_2' et e_3 et en déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}"$.

La question 1) a montré qu'on pouvait supposer $\alpha \neq \gamma$, ce qu'on fera dans toute la suite de l'exercice.

B - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n$ est de la forme

$$A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & a_n & b_n \\ 0 & \beta^n & c_n \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix},$$

où a_n, b_n et c_n vérifient les relations

$$\begin{cases} a_{n+1} = \alpha^n a + \beta a_n = \alpha a_n + \beta^n a \\ b_{n+1} = \alpha^n b + c a_n + \gamma b_n = \alpha b_n + a c_n + \gamma^n b, \quad \text{avec } a_0 = b_0 = c_0 = 0 \\ c_{n+1} = \beta^n c + \gamma c_n = \beta c_n + \gamma^n c \end{cases}$$

(on pourra remarquer que $A^n A = A A^n$).

C - Déterminer A^n. (Dans le cas où $\alpha = \beta$, on montrera que $a_n = n a \alpha^{n-1}$ si $n \in \mathbb{N}^\times$, et on procédera de façon analogue si $\beta = \gamma$)

EXERCICE III

On mesure la pression d'un gaz donné correspondant à diverses valeurs du volume V. Une étude théorique a montré qu'il devait y avoir entre P et V une relation du type $P = kV^a$, où k et a sont des constantes.
Les mesures effectuées ont donné les résultats suivants :

n° i de la mesure	1	2	3	4	5	6
Volume V_i (en m^3)	54,3	61,8	72,4	88,7	118,6	194
Pression P_i (en Pascal)	61,2	49,5	37,6	28,4	19,2	10,1

A - Représenter sur un papier à deux échelles logarithmiques, le nuage des points $M_i(V_i, P_i)$.
Les résultats expérimentaux sont-il graphiquement en concordance avec l'étude théorique effectuée ?

B - On pose $x_i = \log P_i$ et $y_i = \log V_i$ (log désigne le logarithme décimal)
N.B : Pour traiter cette questionn les candidats dresseront un tableau de calculs indiquant toutes les valeurs ainsi que les sommes nécessaires à la détermination des paramètres demandés.
Pour réaliser ce tableau, les logarithmes seront arrondis, au plus proche, à 0,0001 près et tous les autres nombres du tableau en seront déduits et indiqués avec la même précision.
On indiquera les formules précisées.

1) Déterminer, à 0,0001 près, le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
2) Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression D de y par rapport à x. Les coefficients seront donnés à 0,0001 près.
3) Tracer la droite D sur le graphique précédent après en avoir déterminer deux points.

C - Déterminer, à 0,0001 près au plus proche, les coefficients k et a de la relation théorique.