IECS 1990 Option technologique

Les deux problèmes sont indépendants

Problème I

Résolution de l'équation $e^x = -x$ à l'aide de la méthode de Newton.

A - 1) Soit f la fonction numérique de la variable réelle qui à x associe $e^x + x$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$; on la note a.

2) Soit g la fonction numérique de variable réelle qui à x associe $\dfrac{x-1}{1+e^{-x}}$.
Montrer que les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = x$ sont équivalentes.

B - Etude de la fonction g.

1) Soit k la fonction numérique de variable réelle qui à x associe $1 + xe^{-x}$; établir le tableau des variations de k; calculer $k(a)$; indiquer le signe de $k(x)$ en fonction de x.
2) Utiliser la question précédente pour établir le tableau de variations de g.
3) Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité : 3 cm). Préciser les branches infinies de $\mathcal{C}$.
4) Etablir la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite D d'équation $y = x - 1$.
5) Dessiner $\mathcal{C}$ et D.
6) Indiquer le nombre de points d'inflexion de $\mathcal{C}$ en utilisant le dessin précédent (il n'est pas demandé de calculs).

C - Etude d'une suite de valeurs approchées de a : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $u_0 = -\dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$.

1) Calculer les valeurs approchées de u_1, u_2 et u_3 avec la précision de la calculatrice.
2) Montrer que, pour tout entier n, u_n est compris entre a et $-\dfrac{1}{2}$.
3) Etudier le sens de variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pourra utiliser la question précédente et **B-**1)
4) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.
5) Montrer que, pour tout x entre a et $-\dfrac{1}{2}$, $|g'(x)| \leqslant 0,2$ (Utiliser le sens de variations de k et une valeur approchée de $e^{-\frac{1}{2}}$).
6) Montrer que, pour tout entier naturel n, $\quad |u_{n+1} - a| \leqslant 0,2\,|u_n - a|$.
En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - a| \leqslant (0,2)^n \times 0,1$.
Trouver un entier naturel n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de a à 10^{-10} près.

Probleme II

On s'intéresse à la phase finale d'un jeu lors d'un match de tennis. Deux joueurs A et B jouent une succession de points. Un point joué est toujours gagné, soit par le joueur A, soit par le joueur B. Il y a quatre situations possibles

- *Situation numéro 1* : les joueurs sont à égalité (c'est la situation initiale)

- *Situation numéro 2* : avantage pour le joueur A
- *Situation numéro 3* : avantage pour le joueur B
- *Situation numéro 4* : fin du jeu (on ne distingue pas les deux issues possibles : A gagne ou B gagne)

On considère que les deux joueurs sont d'égale force, donc que chaque joueur a une chance sur deux de gagner chacun des points joués.
Dans la situation 1, on passe à la situation 2 ou à la situation 3 suivant que le point est gagné par A ou par B; de la situation 2, on passe à la situation 4 si A gagne le point, sinon on revient à la situation 1; de même, de la situation 3 on revient à la situation 1 si A gagne le point, sinon on passe au 4
Bien que le jeu soit terminé dès qu'on atteint la situation 4, on va considérer, pour modéliser le jeu, que l'on reste toujour dans cette situation dès qu'on l'a atteinte.
Soit X_n la variable aléatoire dont la valeur est le numéro de la situation lorsque n points ont été joués depuis la situation initiale, pour $i \in \{1;2;3;4\}$ et $j \in \{1;2;3;4\}$, on note $a_{i,j}$ la probabilité que X_{n+1} soit égal à i sachant que X_n vaut j. Soit A la matricee dont le coefficient sur la ligne i et la colonne j est $a_{i,j}$

1 - Justifier $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

2 - Chercher les valeurs propres de la matrice A.

3 - Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$; calculer P^{-1}, en indiquant les calculs intermédiaires.

4 - Calculer $D = PAP^{-1}$.

5 - Montrer que, pour toutentier naturel n, $A^n = P^{-1}D^nP$.

6 - Calculer A^{10}.

7 - Soit $Y_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$; $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Montrer que, pour tout entier naturel n : $Y_{n+1} = AY_n$.
Montrer que, pour tout entier naturel $n; Y_n = A^nY_0$.
Calculer Y_{10}