IECS 1991 Option économique et technologique

I - Voici les notes ontenues par les candidats l'EME en 1990 à l'épreuve écrite d'anglais première langue; les notes ont des valeurs entières comprises entre 0 et 100.

Classes	[0;4]	[5;9]	[10;14]	[15;19]	[20;24]	[25;29]	[30;34]	[35;39]	[40;44]
Effectifs	4	8	33	83	120	147	209	207	270

Classes	[45;49]	[50;54]	[55;59]	[60;64]	[65;69]	[70;74]	[75;79]	[80;84]	[85;100]
Effectifs	239	213	159	75	51	30	11	4	1

1) Calculer à 10^{-4} près les fréquences cumulées jusqu'aux valeurs (comprise)

$$14; \quad 29; \quad 44; \quad 59; \quad 74$$

2) Placer les points ainsi obtenues sur la feuille de papier Gausso-arithmétique.
3) Justifier l'approximation de cette statistique par une variable aléatoire normale.
4) Obtenir graphiquement une estimation à l'unité près de la moyenne et de l'écart-type de cette variable aléatoire normale; justifier brièvement

II - Soit $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est inversible et calcule A^{-1}.
2) Déterminer les valeurs propres de A^{-1} et les vecteurs propres associés.
En déduire que A^{-1} n'est pas diagonalisable.
3) Trouver $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^{-1} = -2I + B$ avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A^{-n} = (A^{-1})^n$; calculer A^{-n} (écrire tous les coefficients de cette matrice en fonction de n).
5) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à x associe $(ax^2 + bx + c)\exp(-\frac{1}{2}x)$.
Montrer qu'il existe $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = (a'x^2 + b'x + c')\exp(-\frac{1}{2}x)$$

Exprimer a', b', c' en fonction de a, b, c.
6) Ecrire matriciellement ces relations donnant a', b' et c' en fonction de a, b et c puis, à l'aide de la première question, exprimer a, b et c en fonction de a', b' et c'.
7) Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dont la dérivée cinquième est l'application qui à tout réel x associe $(-2x^2 + 3x + 1)\exp(\frac{1}{2}x)$, en utilisant les questions précédentes.

III - Une cible de jeu de fléchettes est constituée d'un disque en bois de 16 cm; elle est peinte en blanc, sauf la zone centrale peinte en rouge, qui est un disque de rayon R et de même centre que la cible. On appelle X la variable aléatoire dont la valeur est la distance entre le centre de la cible et le point d'impact de la fléchette, cette distance étant mesurée en cm. A la suite d'une étude statistique, on considère que pour un joueur donné, la loi de probabilité de X est la loi exponentielle de paramètre a dont la densité est la fonction f_a définie par :

$$f_a(x) = a\exp(-ax) \text{ si } x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } f_a(x) = 0 \text{ sinon.}$$

1) Soit F_a la fonction de répartition de X. Pour tout réel x, exprimer $F_a(x)$ en fonction de a et de x.
2) On observe que, pour un joueur occasionnel, une fléchette sur 15 n'atteint pas la cible; comment peut-on évaluer a à l'aide de cette observation ? Donner une valeur approchée de a à 10^{-3} près.
3) Désormais, on prend $a = 0,17$. Soit $n \in \mathbb{N}^\times$; quelle valeur doit-on donner à R pour que la probabilité qu'une fléchette atteigne la zone blanche soit n fois la probabilité que celle-ci atteigne la zone rouge ?
4) Soit g la fonction numérique de variable réelle qui à x associe $\dfrac{100}{17}\ln\left(\dfrac{x+1}{x+\exp(-2,72)}\right)$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
   (a) Etablir le tableau des variations de g.
   (b) Montrer que $\mathcal{C}$ a un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées. (Valeurs exactes puis valeurs approchées à 10^{-3} près).
   (c) Dessiner $\mathcal{C}$.
   (d) Donner une primitive de g sur $\mathbb{R}_+$.
   (e) Après avoir comparé $\ln(x+1)$ et $\ln(x+\exp(-2,72))$ pour $x \in \mathbb{R}_+$, minorer $\int_0^x g(t)dt$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et en déduire la limite en $+\infty$ de la fonction qui à x associe $\int_0^x g(t)dt$.
5) Vérifier que, pour $n \in \mathbb{N}^\times$, $g(n)$ est la valeur de R demandée à troisième question; calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de $g(4)$.
   Désormais, on prend $R = 1,2$ cm; calculer des valeurs approchées à 10^{-4} près des probabilités :
   - d'atteindre avec une fléchette la zone rouge
   - d'atteindre avec une fléchette la zone blanche
   - d'atteindre avec une fléchette la zone rouge sachant que la cible a été atteinte
6) On considère que les lancers de fléchettes sont indépendants. Un joueur lance 5 fléchettes; Soit N le nombre d'entre elles atteignant la zone rouge; quelle est la loi de probabilité de N ? Donner des valeurs approchées à 10^{-4} près des nombres $P(N = k)$; (k étant un entier, $P(N = k)$ est la probabilité que N prenne la valeur k).
7) Pour 10 F, coût d'une partie, le joueur a le droit de lancer 5 fléchettes; si au moins 3 d'entre elles atteignent la zone rouge : il reçoit un lot dont la valeur est 80 F sinon, il reçoit un lot de consolation dont la valeur est 4 F; au cours d'une journée, l'organisateur vend 60 parties; on admet que les parties sont des épreuves indépendantes.
   (a) Quelle est la probabilité que l'organisateur perde de l'argent ce jour-là ? Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins 200 F.
   (b) Ecrire en langage PASCAL un programme qui affiche à l'écran la probabilité que l'organisateur gagne au moins x francs ce jour-là, x étant fourni au clavier par l'utilisateur du programme.