INSEEC

MATHEMATIQUES

option économique et technologique

Année 1988

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE I

Soit n un entier strictement positif, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

1. Etudier la fonction f_n (on pourra considérer séparément les cas $n = 2p$ et $n = 2p + 1$).
   Tracer les courbes représentatives de f_1 et f_2, dans un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 2$ cm.

2. On suppose $n \geqslant 2$.
   Montrer que f_n'' s'annule pour deux valeurs a_n et b_n, $0 < a_n < b_n$ que l'on déterminera.

3. Soit x_0 un nombre réel strictement positif :

   (a) Démontrer qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$, $\quad x^2 f_n(x) < 1$..

   (b) Calculer $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

   (c) En déduire l'existence de l'intégrale $\int\limits_{x_0}^{+\infty} f_n(x)dx$ et la calculer.

EXERCICE II

Préliminaire : Rappeler la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} |x|^\alpha \ln |x|$ selon les valeurs de α.

1. (a) Soient m un nombre réel et $g_m : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction telle que :

   $$\begin{cases} g_m(x) = x^{m+\frac{3}{2}} \ln(x) \text{ si } x \neq 0 \\ g_m(0) = 0 \end{cases}$$

   Pour quelles valeurs de m, la fonction g_m est-elle continue sur $[0, 1]$? dérivable sur $[0, 1]$?

   (b) Soient m un réel tel que g_m soit continue et Σ un nombre réel : $0 < \Sigma < 1$.
   Calculer $\int\limits_{\Sigma}^{1} g_m(x)dx$.

   (c) Pour cette même valeur de m, calculer $\int\limits_{0}^{1} g_m(x)dx$.

2. (a) Soit t un nombre réel donné tel que $-1 < t < 1$, montrer que pour chaque $x \in [0,1]$ et pour chaque $m \geqslant 0$, on a :
$$1 - xt \geqslant 1 - |t| \qquad \frac{1}{1-xt} = 1 + xt + \cdots + x^m t^m + \frac{t^{m+1}x^{m+1}}{1-xt}.$$
(b) Soit $f_t : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_t(x) = \dfrac{g_0(x)}{1-tx}$ pour chaque t dans $[0,1[$.
Montrer que f_t est continue sur $[0,1]$. Montrer que pour chaque x dans $[0,1]$ et
$$f_t(x) = \sum_{m=0}^{n} t^m g_m(x) + \frac{t^{n+1}}{1-xt} g_{n+1}(x).$$
(c) Soit $n \geqslant 0$. Montrer que $\left| \int\limits_0^1 f_t(x)dx - \sum\limits_{0 \leqslant m \leqslant n} I_m t^m \right| \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{|t|-1}$.

EXERCICE III

Un fumeur se trouvant en plein air possède n allumettes et veut allumer une cigarette. Chaque allumette a la probabilité $\sigma \in]0,1[$ pour que le vent l'éteigne avant que la cigarette soit allumée. On suppose que les essais sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité pour que le fumeur puisse allumer sa cigarette avec les n allumettes ?
2. Soit X le nombre d'allumettes utilisées ? Expliciter l'évènement $X = n$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
3. Soit A l'évènement : le fumeur réussit à allumer sa cigarette.
Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement $X = k$ sachant que A est réalisé.

EXERCICE IV

On considère la répartition d'une population de 50 personnes suivant deux caractères : la taille X et le poids Y :

$Y \backslash X$	[155;165[	[165;175[	[1,75;185]
[55;65[	2	2	0
[65;75[	5	8	4
[75;85[	4	9	6
[85;95]	1	4	5

1. Tracer le nuage de points.
2. Déterminer les lois marginales pour X et pour Y.
3. Calculer la covariance entre X et Y.
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire $r_{X,Y}$.
5. Calculer les coefficients a et b de la droite $Y = aX + b$ par la méthode des moindres carrés.
Tracer cette droite sur le même graphe que le nuage de points.

Nota : les calculs intermédiaires doivent figurer sous forme de tableau récapitulatif, les formules utilisées seront données avec la signification des symboles.