INSEEC

MATHEMATIQUES

option générale et générale prime

Année 1988

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE I

On considère l'ensemble E des matrices carrées notées $C(x,y) = xI + yA$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. (a) Montrer que E muni de la loi $+$ et de la loi externe sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur le corps des réels.
   (b) Calculer A^2, en déduire que A^2 appartient à E et que $A^2 = C(2,1)$.
   (c) Montrer que (I, A) est une base de E et que A^{-1} est un élément de E.
2. (a) y_0 étant un réel donné non nul, trouver les valeurs de x telles qu'il existe un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$, $V(a,b,c)$ vérifiant $C(x_0,y_0)V = 0$. En déduire les valeurs de x pour lesquelles $C(x,y_0)$ n'est pas inversible.
   (b) Déterminer le rang de $C(y_0,y_0)$ et le rang de $C(-2y_0,y_0)$.
3. Déterminer en fonction de x et y les coouples (x',y') tels que $C(x,y).C(x',y') = 0$.

EXERCICE II

On considère la famille $(f_m)_{m\in]1,+\infty[}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $f_m(x) = x - m\ln\left[1 + \dfrac{x}{m+1}\right]$

1. (a) Trouver l'ensemble de définition de f_m noté D_m.
   (b) Etudier le comportement de f_m aux extrémités de l'ensemble de définition.
   (c) Montrer que f_m est dérivable sur D_m et calculer sa dérivée.
   (d) Représenter le tableau de variation de f_m.
2. (a) On considère la fonction φ définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\text{pour tout } m \in]1,+\infty[, \qquad \varphi(m) = -\frac{1}{m} - \ln\left(\frac{m}{m+1}\right).$$

   Etudier les variations de φ et en déduire son signe.
   (b) Montrer que pour tout $m \in]1,+\infty[$, il existe $x_m \in]-\infty,-1[$ unique tel que $f_m(x_m) = 0$
   (c) Tracer la courbe représentative C_m de f_m dans le cas où $m = 4$.

3. (a) Pour tout $m \in]1, +\infty[$, on considéère la fonction g_m définie par $g_m(x) = f_m(-1-x) - f_m(-1+x)$ pour $x \in [^\circ, m[$.
   Donner l'expression de g_m.
   (b) Etudier les variations de g_m sur $[0, m[$ et en déduire que $f_m(-2) > 0$ et que $x_m \in]-2, -1[$.
   (c) Donner le développement limité à l'ordre deux au voisinage de 0 de $\ln(1+u)$.
   En posant $u = \dfrac{x_m}{1+m}$ et en utilisant $f_m(x_m) = 0$, montrer que $\lim\limits_{m \to +\infty} x_m = -2$.
   (d) Calculer $\int\limits_{x_m}^{0} \left[x - m \ln(1 + \dfrac{x}{m+1}) \right] dx$

EXERCICE III

Une urne contient 12 boules blanches et 8 boules noires. On extrait successivement de cette urne 25 boules en opérant de la façon suivante :

- après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne.
- on ajoute de plus dans cette urne x boules de la couleur de la boule qui vient d'être remise ($x \in \mathbb{N}$).

1. Supposons que $x = 1$ et que les trois premières boules tirées sont respectivement une boule noire, une boule noire et une boule blanche. Donner la composition de l'urne avant le second tirage, avant le troisième tirage, avant le quatrième.

2. On suppose que $x = 0$. Désignons par X le nombre total de boules blanches tirées au cours des 25 tirages.

   (a) Déterminer $P(X = 2)$ et $P(X \geqslant 3)$.
   (b) Donner l'espérance mathématique de X.

3. On suppose x quelconque dans $\mathbb{N}$. Soient les évènements
   B_i " la $i^{ième}$ boule tirée est blanche " N_i " la $i^{ième}$ boule tirée est noire "
   Calculer $P(B_2)$ et $P(N_2)$.

4. On choisit x au hasard parmi les chiffres $\{0, 1, 2\}$. Calculer la probabilité que x soit égal à 0 sachant que :

   (a) B_1 est réalisé.
   (b) B_2 est réalisé.
   (c) $B_1 \cap B_2$ est réalisé.

EXERCICE IV

On donne le tableau suivant où x_i représente l'année et y_i le SMIC horaire en F.

x_i	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
y_i	8,34	9,40	10,61	11,94	13,80	16,30	19,17	21,50	23,53

1. Tracer le nuage des points représentant la série.

2. Déterminer les équations des droites de régression de x par rapport à y et de y par rapport à x.
   (On utilisera les changements des variables suivants : $u = x - 1980$ et $\theta = y - 16,30$).
   Calculer le coefficient de corrélation linéaire de x et y.

3. Tracer sur le même graphe que le nuage de points le graphe de deux droites de régression.

Nota : tous les calculs intermédiaires, tronqués à 10^{-3}, doivent figurer sous forme d'un tableau récapitulatif, les formules utilisées seront données avec la signification des symboles.