INSEEC
MATHEMATIQUES

option générale et générale prime

Année 1990

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE I

Soit E l'espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, $B(e_1, e_2, e_3)$ une base de E et φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\varphi(e_1) = -e_1 - e_2 + 2e_1; \quad \varphi(e_2) = -e_1; \quad \varphi(e_3) = -e_1 + e_3.$$

Soit M la matrice de φ dans la base B. On notera $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées trois lignes trois colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$, et I la matrice unité.

1. Déterminer M. Calculer M^2.
2. Montrer que $M^3 = -I$ et en déduire M^{-1}.
3. Soit B' le système de vecteurs (e'_1, e'_2, e'_3) défini par :

   $$e'_1 = e_1 + e_2 - e_3; \quad e'_2 = e_1 - e_2; \quad e'_3 = e_1 - 2e_3.$$

   Montrer que B' est une base de E.
   Déterminer la matrice de φ dans la base B' notée M'.
4. Montrer que I, M, M^2 sont linéairement indépendantes.
5. Soit F l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ du type $aI + bM + cM^2$ où a, b, c sont réels.
   (a) Montrer que F est un espace vectoriel de dimension trois sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que F est un anneau. Est-ce une algèbre sur $\mathbb{R}$?
6. Montrer que si $A \in F$, A est inversible si et seulement si $a^3 - b^3 + c^3 + 3abc \neq 0$.
   Montrer que l'inverse est dans F.

EXERCICE II

On considère la suite (u_n) où $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$.

1. Etude de la convergence de la suite (u_n).
   (a) Rappeler rapidement les variations de la fonction $x \mapsto \ln x$.

(b) En utilisant le théorème des accroissements finis sur $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}^{\times}$ pour la fonction $x \mapsto \ln x$ démontrer que l'on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \frac{1}{n+1} < \ln x - \ln(n+1) < \frac{1}{n}.$$

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{\times}}$ est bornée et monotone donc convergente. Soit C sa limite appelée constante d'Euler.
On se propose d'exprimer C sous forme d'une intégrale.

2. Etude de quelques inégalités utiles dans la suite de l'exercice.

(a) Démontrer que pour tout $t > -1$, $\quad \ln(1+t) \leqslant t$.
En déduire que : $0 \leqslant e^{-t} - (1+\frac{t}{n})^n$ pour tout $t \leqslant n$.

(b) On considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(t) = t + n\ln(1-\frac{t}{n}) - \ln(1-\frac{t^2}{n}) \text{ pour } n \geqslant 1.$$

Montrer qu'elle est positive sur $[0, \sqrt{n}]$.
En déduire que : $e^{-t} \leqslant (1-\frac{t}{n})^n + \frac{t^2}{n}e^{-t}$ pour $0 \leqslant t < n$.

3. On note $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ et $T_n = \int\limits_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}dx$.

Démontrer par récurrence que $S_n = T_n$, en déduire que $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k}{k}$.

4. Soit la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $I_n = \int\limits_0^1 \left[1-(1-\frac{t}{n})^n\right]\frac{dt}{t}$ et $K = \int\limits_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt$.

(a) Montrer que K est une intégrale convergente (on utilisera 2.a. et le binôme de Newton).

(b) Toujours à l'aide du 2., montrer que $K = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

5. Soit $J_n = \int\limits_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t^n}dt$, $n \geqslant 1$.

(a) Montrer que J_n est convergente (on pourra poser $u = \frac{1}{t}$).

(b) Exprimer J_n sous la forme $\int\limits_1^{+\infty} e^{-t}t^{n-2}dt$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on considère K_n avec $K_n = \int\limits_1^n (1-\frac{t}{n})^n \frac{dt}{t}$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = J_1$.

7. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, $\quad U_n = I_n - K_n$. En déduire $C = \int\limits_0^1 \frac{1-e^{-t}-e^{-1/t}}{t}dt$

EXERCICE III

Une personne donne n coups de téléphone à n correspondants distincts. On admet que les appels sont indépendants entre eux et qu'il y a :

- la probabilité p d'obtenir le correspondant (quel qu'il soit),
- la probabilité $1 - p$ de ne pas l'obtenir.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

A. Quelle est la loi de probabilité de X ? Calculer son espérance mathématique et son écart-type.
Calculer les sept nombres $M_k = P(X = k)$ pour $n = 6$ et $p = 0,8$ chacun à 0,001 près.

B. Après ses n recherches, cette personne rappelle une seconde fois dans les mêmes conditions, les $n - X$ correspondants qu'elle n'a pu joindre la première fois.
Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans cette seconde série d'appels.
$Z = X + Y$ est donc la variable aléatoire égale au nombre de correspondants que cette personne a pu joindre à la fin de la seconde série d'appels.

1. Calculer $p_0 = P(Z = 0)$.
2. Calculer $p_1 = P(Z = 1)$ et montrer que $p_1 = np(1 - p)^{n-2}(2 - p)$.
3. Si l'on pose $p_2 = P(Z = 2)$, calculer p_2.
4. En établissant auparavant
$$\sum_{j=0}^{k} C_n^j C_{n-j}^{k-j} = C_n^k \sum_{j=0}^{k} C_k^j,$$
calculer $P(Z = k)$.
Quelle est la distribution de Z ?