INSEEC

MATHEMATIQUES

option économique et technologique

Année 1990

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE I

On donne le tableau à double entrée, relatif à l'étude de la série double suivante : individus classés en pourcentage sous les deux caractères : poids et taille.
x désigne le poids en kilogrammes, y la taille en centimètres.

${}_y\backslash{}^x$	$40 \leqslant x < 45$	$45 \leqslant x < 50$	$50 \leqslant x < 55$	$55 \leqslant x < 60$
$150 \leqslant y < 155$	20	9	1	0
$155 \leqslant y < 160$	2	18	4	1
$160 \leqslant y < 165$	0	5	12	6
$165 \leqslant y < 170$	0	1	7	14

1. Représenter graphiquement cette série par un nuage de points.
2. Calculer le coefficient de corrélation (le résultat sera donné à 10^{-3} près).

EXERCICE II

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel u_0 et par la relation : $u_{n+1} = e^{1-u_n}$ pour tout entier naturel n.
On note d'autre part

$$\begin{array}{l} v_n = u_{2n} \\ w_n = u_{2n+1} \end{array} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{1-x} \end{array}$$

1. Montrer que l'équation $e^{1-x} = x$ n'admet qu'une seule solution, la déterminer, que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 = 1$.
3. On supposera dans la suite de l'exercice que $u_0 \neq 1$. On considère la fonction

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g \circ g - x = \exp\left[1 - \exp(1-x)\right] - x \end{array}$$

   (a) Démontrer que la fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2 - x - e^{1-x} \end{array}$ ne prend que des valeurs négatives sur $\mathbb{R}$.

   (b) En déduire les variations de la fonction h.

4. Démontrer que les deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées et en déduire qu'elles convergent (on comparera u_0 et u_1).
5. Déterminer la limite de ces deux suites, en déduire celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE III

Préliminaire

1. Démontrer que la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

   On prouve ainsi l'existence de la fonction racine cubique $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[3]{x} \end{array}$.

   On rappelle cependant que l'expression $x^{1/3}$ n'est définie que pour un réel strictement positif et que néanmoins si x est strictement négatif, on peut écrire $-\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-x} = (-x)^{13}$.

2. (a) Etant donné un réel strictement positif ε et x un réel strictement supérieur à -1. Calculer $\int\limits_{-1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\sqrt[3]{1+t}}$.

   (b) Soit y un réel strictement inférieur à $-\frac{1}{2}$, calculer $\int\limits_{2y}^{-1-\varepsilon} \frac{dt}{\sqrt[3]{1+t}}$.

   On considère la fonction numérique F de variable réelle x définie par :

$$F(x) = \int_{x}^{2x} f(t)dt \qquad \text{où } f(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+t}}.$$

PARTIE I

On se propose de déterminer l'ensemble de définition de la fonction F noté D.

1. Montrer que D contient l'ensemble $]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$

2. (a) Pour tout réel x strictement positif, démontrer que :

$$\int_{x}^{2x} \frac{dt}{1+t} \leqslant \int_{x}^{2x} \frac{dt}{\sqrt[3]{1+t}} \leqslant \int_{x}^{2x} \frac{dt}{t}.$$

   (b) En déduire la limite de la fonction F en $+\infty$.

   (c) Pour tout réel x strictement inférieur à -1, démontrer que :

$$\int_{x}^{2x} \frac{dt}{t} \leqslant \int_{x}^{2x} \frac{dt}{\sqrt[3]{1+t}} \leqslant \int_{x}^{2x} \frac{dt}{1+t}.$$

   (d) En déduire la limite de la fonction F en $-\infty$.

3. (a) On considère un réel t appartenant à $]-1, -\frac{1}{2}]$.

   Remarquer que $\sqrt[3]{1+t^3} = \sqrt[3]{1+t} \times \sqrt[2]{1-t+t^2}$ et utiliser les variations de la fonction $t \mapsto 1 - t + t^2$ pour démontrer que :

$$\frac{-1}{\sqrt[3]{1+t}} \leqslant \frac{-1}{\sqrt[3]{1+t^3}} < 0.$$

   (b) Pour tout réel x appartenant à $]-1, -\frac{1}{2}]$, en déduire la convergence de $\int\limits_{-1}^{x} \frac{-dt}{\sqrt[3]{1+t^3}}$.

4. (a) Pour tout réel t appartenant à $[-2, -1[$, démontrer que :

$$\frac{-1}{\sqrt[3]{1+t^3}} < \frac{-1}{\sqrt[3]{1+t}}$$

   (b) Pour tout réel x appartenant à $[-1, \frac{1}{2}[$, en déduire la convergence de : $\int\limits_{2x}^{-1} \frac{-dt}{\sqrt[3]{1+t^3}}$.

5. En déduire l'ensemble de définition de F.

PARTIE II

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : u \mapsto \int\limits_{-1}^{u} f(t)dt$.
   Justifier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et calculer $g'(x)$ pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
2. En déduire la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, -\frac{1}{2}\}$ et la valeur de $F'(x)$ pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}\backslash\{-1, -\frac{1}{2}\}$.
3. Etudier la dérivabilité de F en -1 puis en $-\frac{1}{2}$.
4. Dresser le tableau des variations de la fonction F.
5. Donner l'allure de la courbe représentative de F.
   (on admettra que $F(-1) \simeq 0,93$ et $F(-\frac{1}{2}) \simeq -0,58$)