INSEEC

MATHEMATIQUES

option économique

Année 1991

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE I

Une urne contient 2 boules noires et 8 boules blanches.

1. Un joueur tire successivement 5 boules en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage. S'il tire une boule blanche, il gagne deux poins, dans le cas contraire, il perd 3 points.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus par le joueur en une partie.
   (a) Dresser le tableau définissant la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   (b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$, respectivement espérance et variance de X.
   (c) En faisant le bilan, sachant que le joueur est gagnant à l'issue du jeu, quelle est la probabilité qu'il ait tiré au plus 5 boules blanches ?
2. On se place maintenant dans le cas où le joueur tire dans l'urne les 5 boules simultanément, les dix boules de l'urne étant numérotés de 1 à 10.
   (a) Soit Y la variable aléatoire réelle égale au plus grand des numéros tirés, déterminer la loi de probabilité de Y et calculer $E(Y)$.
   (b) Soit T la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
   Après ce premier tirage, le joueur remet les boules noires obtenues dans l'urne et garde les boules blanches, puis effectue à nouveau un tirage simultané de 5 boules.
   On appelle Z la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors du second tirage.
   Déterminer les lois de probabilités de T et Z et calculer $E(T)$.

EXERCICE II

A la surface d'un étang, une grenouille se déplace sur 3 nénuphars X, Y et Z de la façon suivante :

- si elle est sur X, elle saute sur Y avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$ ou sur Z avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$,
- si elle est sur Y, elle saute sur X avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ ou sur Z avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$,
- si elle est sur Z, elle saute sur X avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$ ou sur Y avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.

La grenouille effectue son premier saut à partir du nénuphar X et on note X_n (respectivement Y_n, respectivement Z_n) les évènements

" à l'issue du $n^{ième}$ saut, la grenouille se trouve sur le nénuphar X (respectivement Y, respectivement Z)"

1. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Démontrer que si l'on note : $A_n = \begin{pmatrix} p(X_n) \\ p(Y_n) \\ P(Z_n) \end{pmatrix}$, alors on a : $A_{n+1} = \left(\dfrac{1}{3}M\right) A_n$.

   ($P(X_n)$ étant la probabilité que la grenouille se trouve sur le nénuphar X à l'issue du $n^{ième}$ saut).

2. On pose : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ et $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que M peut s'exprimer comme combinaison linéaire de J, K et I.

   (b) Calculer $J(K-I)$, $\quad (K-I)J$ et exprimer J^n en fonction de J ($n \in \mathbb{N}^\times$).

   (c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad M^n = 3^{n+1}J + (K-I)^n$.

3. On considère les sommes

$$S_1 = \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{3}\right)} C_n^{3p}(-1)^{n-3p}, \quad S_2 = \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{3}\right)} C_n^{3p+1}(-1)^{n-(3p+1)} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n}{3}\right)} C_n^{3p+2}(-1)^{n-(3p+2)}$$

   ($E\left(\dfrac{n}{3}\right)$ désignant la partie entière de $\dfrac{n}{3}$; on conviendra d'autre part que m et n étant deux entiers naturels si : $m > n$ alors $C_n^m = 0$)

   (a) Montrer que

$$S_1 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3}\right)^n \cos\frac{5n\pi}{6} \quad \text{et} \quad S_2 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3}\right)^n \cos\frac{(5n+8)\pi}{6}.$$

   Calculer S_3, en déduire l'expression de M^n et conclure en calculant $p(X_n), p(Y_n), p(Z_n)$.

PROBLEME

Première partie

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, \quad \forall x \in]0, +\infty[\end{cases}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2. Après avoir justifier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+^\times$, calculer pour tout réel x strictement positif $f'(x)$.

3. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur $]0, 4\pi]$ trois solutions que l'on notera $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ($\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$) et on déterminera des valeurs approchées à 10^{-1} près).
   (On pourra poser $\theta : x \mapsto x\cos x - \sin x$, et utiliser les variations de cette fonction).

4. En déduire les variations de la fonction f sur $[0, 4\pi]$ et construire sa représentation graphique ainsi que celles des fonctions :

$$h : \begin{cases} [1, 4\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{cases} \quad \text{et} \quad k : \begin{cases} [1, 4\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

   dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, l'unité étant 1 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).

Deuxième partie

On considère la fonction $F : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int\limits_0^x f(t)dt \end{array} \right.$

1. Justifier l'existence de F sur $\mathbb{R}_+$.

2. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)dt.$

   (a) Après avoir justifié l'existence de a_n, montrer que : $a_n = \int\limits_0^\pi f(t + n\pi)dt.$

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad 0 \leqslant a_{2n} + a_{2n+1} \leqslant \dfrac{1}{4n^2}.$

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times \backslash \{1\}, \quad \dfrac{1}{n^2} \leqslant \int\limits_{n-1}^{n} f(\dfrac{1}{t^2})dt$, et en déduire la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ où : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}.$

4. Après avoir justifé son existence, démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ définie par : $I_n = \int\limits_0^{2n\pi} f(t)dt$ est convergente. On notera L sa limite.

5. (a) Montrer que si : $x \in [2n\pi, (2n+1)\pi[, \quad n \in \mathbb{N}^\times$ alors : $I_n \leqslant F(x) \leqslant I_n + \dfrac{1}{2n}.$

   (b) Montrer que si : $x \in [(2n+1)\pi, (2n+2)\pi[, \quad n \in \mathbb{N}^\times$ alors : $I_{n+1} \leqslant F(x) \leqslant I_n + \dfrac{1}{2n}.$
   (on pourra utiliser, sans le démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \ln(1+x) \leqslant x$).

   (c) En déduire alors que F admet une limite finie en $+\infty$.

Troisième partie : Calcul de L

1. Soient a et b deux nombres réels, $a < b$, et soit f_1 une fonction numérique de variable réelle, dérivable sur $[a, b]$, de fonction dérivée continue sur $[a, b]$.

   $$\text{On pose } I_n(f_1) = \int\limits_a^b f_1(t) \sin ntdt, \quad n \in \mathbb{N}^\times.$$

   A l'aide d'une intégration par parties correctement justifiée, démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(f) = 0.$

2. On considère la fonction θ_n définie par $\left\{ \begin{array}{l} \theta_n(0) = 2\pi \\ \theta(t) = \dfrac{\sin 2nt}{2\sin\dfrac{t}{2}} \cos\dfrac{t}{2} \quad \forall t \in]0, \pi[, \forall n \in \mathbb{N}^\times \end{array} \right.$