# INSEEC
# MATHEMATIQUES

option technologique

**Année 1991**

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

---

## EXERCICE I

Le tableau suivant donne le montant, en milliards de francs, des importations de la France en biens de consommation courante de 1982 à 1989 :

| Année | 1982 | 1983 | 1984 | 1985 | 1986 | 1987 | 1988 | 1989 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| rang de l'année $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| montant $m_i$ des importations | 93,5 | 102,7 | 116,6 | 128,4 | 139,2 | 153,3 | 170,2 | 193,6 |

(source : TEF 90 publication INSEE).
On pose $y_i = \log m_i$, où log est le logarithme décimale.

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre $y$ et $x$.
   Pour ce faire, on citera les formules utilisées et on dressera le tableau des calculs nécessaires; les $y_i$ seront arrondis à $10^{-4}$ près au plus proche; les autres nombres du tableau à partir de ces valeurs arrondies et seront arrondis à $10^{-4}$ près au plus proche. Le coefficient de corrélation linéaire trouvé sera arrondi à $10^{-3}$ près au plus proche.

2. Déterminer une équation de la droite de régression de $y$ en $x$.
   Les coefficients obtenus seront arrondis à $10^{-3}$ près au plus proche.

3. En déduire une relation entre $m$ et $x$ de la forme $m = k\alpha^x$, $k$ sera arrondi à l'entier le plus proche et $\alpha$ sera arrondi à $10^{-3}$ près au plus proche.

4. Donner une estimation du montant des importations de la France en biens de consommation courante en 1990.

## EXERCICE II

### Partie A

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $M$.

2. A l'aide de la méthode du pivot de Gauss, montrer que la matrice $P$ est inversible et calculer $P^{-1}$.

3. Justifier que la matrice $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale à préciser.

4. Calculer $M^n$ pour tout entier naturel $n$ non nul.

5. On pose $N = \frac{1}{10}M$. Vérifier que pour tout entier naturel $n$ non nul

$$M^n = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -\frac{2}{10^n}+2 & -\frac{2}{10^n}+2 & \frac{7}{10^n}+2 \\ \frac{4}{10^n}+5 & \frac{4}{10^n}+5 & -\frac{14}{10^n}+5 \\ -\frac{2}{10^n}+2 & -\frac{2}{10^n}+2 & \frac{7}{10^n}+2 \end{pmatrix}$$

### Partie B :

Une enquête a été réalisé auprès des télespectateurs qui regardent le journal télévisé de 20h, sur l'une des trois chaines A,B,C.

1. Les premiers résultats ont permis d'établir que les probabilités $a, b, c$ qu'un télespectateur regarde la chaine A, la chaine B, la chaine C sont respectivement

$$a = 0,5 \quad b = 0,4 \quad c = 0,1$$

   (a) On interroge dix télespectateurs (foyers différents).
   Quelle est la probabilité à $10^{-4}$ près, que :

      i. six de ces personnes exactement regardent la chaine A ?
      ii. au moins une personne regarde la chaine C ?

   (b) On interroge cent personnes (foyers différents).

      i. Préciser la variable aléatoire $X$ indiquant le nombre de télespectateurs qui regardent la chaine C. On approche $X$ par la loi de Poisson de paramètre 10. A l'aide de cette approximation, et avec la précision permise par les tables, calculer la probabilité de l'évènement suivant : $(10 \leqslant X \leqslant 20)$.
      ii. Préciser la variable aléatoire $Y$ indiquant le nombre de télespectateurs qui regardent la chaine B. On approche $Y$ par la loi normale de paramètre $m = 4\grave{a}$ et $\sigma = 4,9$. A l'aide de cette approximation et avec la précision permise par les tables, calculer les probabilités des trois évènements suivants :

$$(Y \leqslant 45); \quad (Y \leqslant 34); \quad (34 \leqslant Y \leqslant 45)$$

2. Chaque jour, certains télespectateurs se déclarent insatisfaits du traitement de l'information sur la chaine de leur choix et manifestent l'intention de changer de chaine le jour suivant.
   On remarque que :

   - Si un télespectateur regarde un jour la chaine A, la probabilité qu'il regarde le jour suivant :
     - la chaine A est 0,2
     - la chaine B est 0,6
     - la chaine C est 0,2
   - Si un télespectateur regarde un jour la chaine B, la probabilité qu'il regarde le jour suivant :
     - la chaine A est 0,2
     - la chaine B est 0,6
     - la chaine C est 0,2
   - Si un télespectateur regarde un jour la chaine C, la probabilité qu'il regarde le jour suivant :
     - la chaine A est 0,3
     - la chaine B est 0,4
     - la chaine C est 0,3

On note $a_n$, $b_n$, $c_n$ les probabilités qu'un télespectateur regarde la chaine A, la chaine B, la chaine C, le jour $n$ et on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \qquad \text{avec } X_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,4 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

(a) Prouver que pour tout entier naturel $n$, $X_{n+1} = NX_n$ où $N$ est la matrice définie dans le 5. de la partie A.
Justifier alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad X_n = N^n X_0$$

(b) Calculer $a_n$, $b_n$, $c_n$ en fonction de $n$ pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$ et préciser les limites respectives des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

# EXERCICE III

1. On considère les fonctions $f$, $g$ et $h$ suivantes :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 6e^{-x} \end{array} \right. \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x}+1 \end{array} \right. \qquad h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln 6 - \ln(e^x+1) \end{array} \right.$$

(a) Dresser les tableaux de variations respectifs de $f$ et $g$.

(b) Tracer, sur un même graphique, les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ de $f$ et $g$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités : 10 cm sur $Ox$, 3 cm sur $Oy$)
Un point $G_k$ étant placé su $\mathcal{C}_g$, la parallèle à $Ox$ issue de $G_k$ coupe $\mathcal{C}_f$ en $F_{k+1}$; la parallèle à $Oy$ issue de $F_{k+1}$ coupe $\mathcal{C}_g$ en $G_{k+1}$.
Placer sur la figure précédente $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$, $F_5$ sachant que $G_0$ est le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse 1.

(c) Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'équation $f'(x) = g(x)$.

(d) Etudier les variations de $h$ et $h'$ et justifier que :

$$\forall x \in [0, \frac{3}{2}], \quad |h'(x)| \leqslant 0,82.$$

2. Le prix d'un bien de consommation durant la période $n$ est noté $p_n$. On pose $p_0 = 1$.
On suppose que, pour tout entier naturel $n$, durant la période $(n+1)$,

- la demande $d_{n+1}$ de ce bien est égale à $f(p_{n+1})$
- l'offre $s_{n+1}$ de ce même bien est égale à $g(p_n)$.

Sachant que pour chaque période, l'offre est égale à la demande

(a) Préciser l'abscisse des points $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$ et $F_5$ en fonction de termes de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = h(p_n)$.

(c) Montrer, par récurrence sur $n$, que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant p_n \leqslant \dfrac{3}{2}$.

(d) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |p_{n+1} - \ln 2| \leqslant 0,82\,|p_n - \ln 2|$.
En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |p_n - \ln 2| \leqslant (0,82)^n$$

et prouver que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite à préciser.

Inclure les tables de loi normale et poisson