INSEEC

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option technologique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

1. On considère la suite numérique u définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\times \quad u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$$

   (a) Montrer que la suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + u_{n+1}$ est une suite géométrique que l'on caractérisera.

   (b) On considère la suite w définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = (-1)^n v_n$.

   Evaluer en fonction de u_n, $n \in \mathbb{N}^\times$, la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} w_k$ et démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{9} + \frac{8^n}{9}$$

2. On considère la matrice carrée d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   et on note I la matrice unité

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer A^2 et déterminer α et β deux réels tels que : $A^2 = \alpha A + \beta I$.

   (b) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I.

   (c) Monter qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a_n A + b_n I$$

   (On exprimera a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n).

   (d) Trouver une relation de récurrence vérifiée par les termes de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et déterminer l'expression de a_n et b_n en fonction de n.

3. déterminer les 9 coefficients de la matrice A^n.

4. On considère le couple de variables aléatoires X et Y définies par :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, 2, 3\} \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad P(X = i \cap Y = j) = k \times a_{ij}$$

   où la matrice A précédente est telle que $A = (a_{ij})\ 1 \leqslant i \leqslant 3$ et $1 \leqslant j \leqslant 3$.

   (a) Déterminer le nombre réel k.

   (b) les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

   (c) déterminer $\rho(X, Y)$ le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y).

Exercice 2

Une urne contient des boules blanches et des boules noires, la proportion de boules blanches est p ($p \in]0,1[$, $p \neq 1/2$).
On effectue dans cette urne une suite de tirages d'une boule, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage.
A chaque tirage on notera :
B l'événement : "obtenir une boule blanche"
N l'événement : "obtenir une boule noire"
On considère la variable aléatoire X qui prend la valeur n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$) si on obtient pour la première fois la succession "BN", B étant obtenu au tirage $(n-1)$ et N au tirage n.
Par exemple si on obtient la succession "NNBBBBN" alors $X = 7$.

1. (a) Déterminer les probabilités des événements :
   A_1 : "$(X = n)$ et il n'y a eu que des boules blanches au cours des $(n-2)$ premiers tirages"
   A_2 : "$(X = n)$ et il n'y a eu qu' une seule boule noire au cours des $(n-2)$ premiers tirages"
   A_3 : "$(X = n)$ et il n'y a eu que deux boules noires au cours des $(n-2)$ premiers tirages"

   (b) Déterminer $P(X = 5)$

   (c) Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geqslant 2 \quad P(X = k) = p^k \times \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1-p}{p}\right)^i$

2. Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X.

Exercice 3

1. On considère une fonction f continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
   Pour $x \in [0,1]$, on considère la suite $(u_n(x))_{n>0}$ définie par :

$$u_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left[1 + \frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$

   (a) Soit $u \in [0,+\infty[$ montrer que : $u - \frac{u^2}{2} \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$

   (b) soit $M = \sup_{t\in[0,1]} f(t)$ montrer que : $\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{x}{n} f(\frac{k}{n})\right]^2 \leqslant \frac{M^2 x^2}{n}$

   (c) On pose $v_n(x) = \ln(u_n(x))$ montrer que : $\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = x \int_0^1 f(t)dt$

2. Application
   On se place dans cette question dans le cas particulier où la fonction f est définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{lll} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \mapsto & t^2 e^{-t} \end{array} \right.$$

   Déterminer, dans le cas où $x = \frac{1}{2}$, $\lim_{n\to+\infty} v_n(\frac{1}{2})$.