INSEEC

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option technologique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On considère les matrices carrées d'ordre 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer J^2.
2. (a) Déterminer deux réels α et β tels que $A = \alpha I + \beta J$.
   (b) Etablir par récurrence que, pour tout entier naturel n : $A^n = a_n I + b_n J$.
   (On exprimera a_{n+1}et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n).
3. On considère les deux suites de termes généraux U_n et V_n définies par:

$$U_n = a_n + b_n \quad \text{et} \quad V_n = a_n - b_n$$

   (a) Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   Calculer U_n en fonction de n.
   (b) Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. Calculer V_n en fonction de n.
   (c) En déduire les 9 termes de la matrice A^n.

Exercice 2

I-

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 2x^3 + 3 - 6\ln(x)$

1. Déterminer 3 réels a, b, c, tels que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad (x^3-1) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$
2. (a) Calculer la dérivée g' de g. Etudier son signe.
   (b) Calculer $g(1)$ - En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$

II -

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par: $f(x) = x - 1 + \dfrac{3\ln(x)}{2x^2}$
On note (C) la courbe représentative de J

1. Etudier les variations de f
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Vérifier que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C).
4. Construire (C) et (D).
5. (a) Montrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ converge
   (b) En déduire l'aire de la surface limitée par la courbe (C), la droite (D) et la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 3

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses les interventions ont lieu parfois avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est 0,25.

1. Un client appelle le service à quatre reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X.
   (c) Calculer la probabilité de l'événement le client a subi au moins un retard.
2. Au cours des années 1998 et 1999 le service après-vente enregistre une succession d'appels. Le rang du premier appel pour lequel l'intervention s'effectue avec retard en 1998 (respectivement en 1999) définit une variable aléatoire Y (respectivement Z).
   (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) $\forall k \in \mathbb{N}^{\times}$, calculer $p(Y \leqslant k)$.
   (c) $T = \max(Y, Z)$ où max désigne le plus grand des deux nombres Y ou Z.
      i. Décrire l'événement $(T \leqslant k)$ en fonction de $(Y \leqslant k)$ et de $(Z \leqslant k)$.
      ii. Déterminer la loi de T.
      iii. Calculer l'espérance $E(T)$ de la variable T.