INSEEC

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option technologique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie A

1. (a) Déterminer deux réels a et b tels que : $A^2 = aA + bI$
   (b) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I.

2. (a) Calculer $I + 3B$.
   (b) Exprimer A^2 en fonction de I et de B.

3. (a) Montrer par récurrence qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = I + u_n B$$

   (On montrera que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -2u_n + 3$)
   (b) Calculer u_n en fonction de n
   (c) En déduire les 9 termes de la matrice A^n.

Partie B

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   On indiquera tous les détails sur la copie.

2. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

3. (a) Calculer D^n pour tout entier naturel n.
   (b) Vérifier par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$.
   (c) Retrouver alors A^n.

Exercice 2

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{-x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ f(x) = 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1. (a) Étudier les variations de f.
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$; préciser la branche infinie
   (c) Dresser le tableau de variation de f puis construire la courbe représentative de f.
   On prendra $\frac{1}{e} = 0,37$
2. (a) Soit a un réel strictement positif ; en utilisant une intégration par parties, calculer $I(a) = \int_0^a f(x)dx$.
   (b) Déterminer la limite de $I(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.
3. (a) Vérifier que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
   (b) Calculer l'espérance $E(X)$ de X.

Exercice 3

Un organisme de voyages fait une étude sur le choix des vacances. Ce choix porte sur la France et l'étranger.
Au départ, chaque client choisit la France avec la probabilité $\frac{3}{4}$ et l'étranger avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
Si la $n^{ième}$ année, le client a choisi la France, la probabilité de choisir la France l'année suivante est $\frac{3}{4}$.
Si la $n^{ième}$ année, le client a choisi l'étranger , la probabilité de choisir la France l'année suivante est $\frac{1}{2}$.
On note F_n l'événement " le client a choisi la France la $n^{ième}$ année et ρ_n la probabilité de l'événement F_n.

1. Exprimer ρ_{n+1} en fonction de ρ_n.
2. Déterminer l'expression de ρ_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \rho_n$.